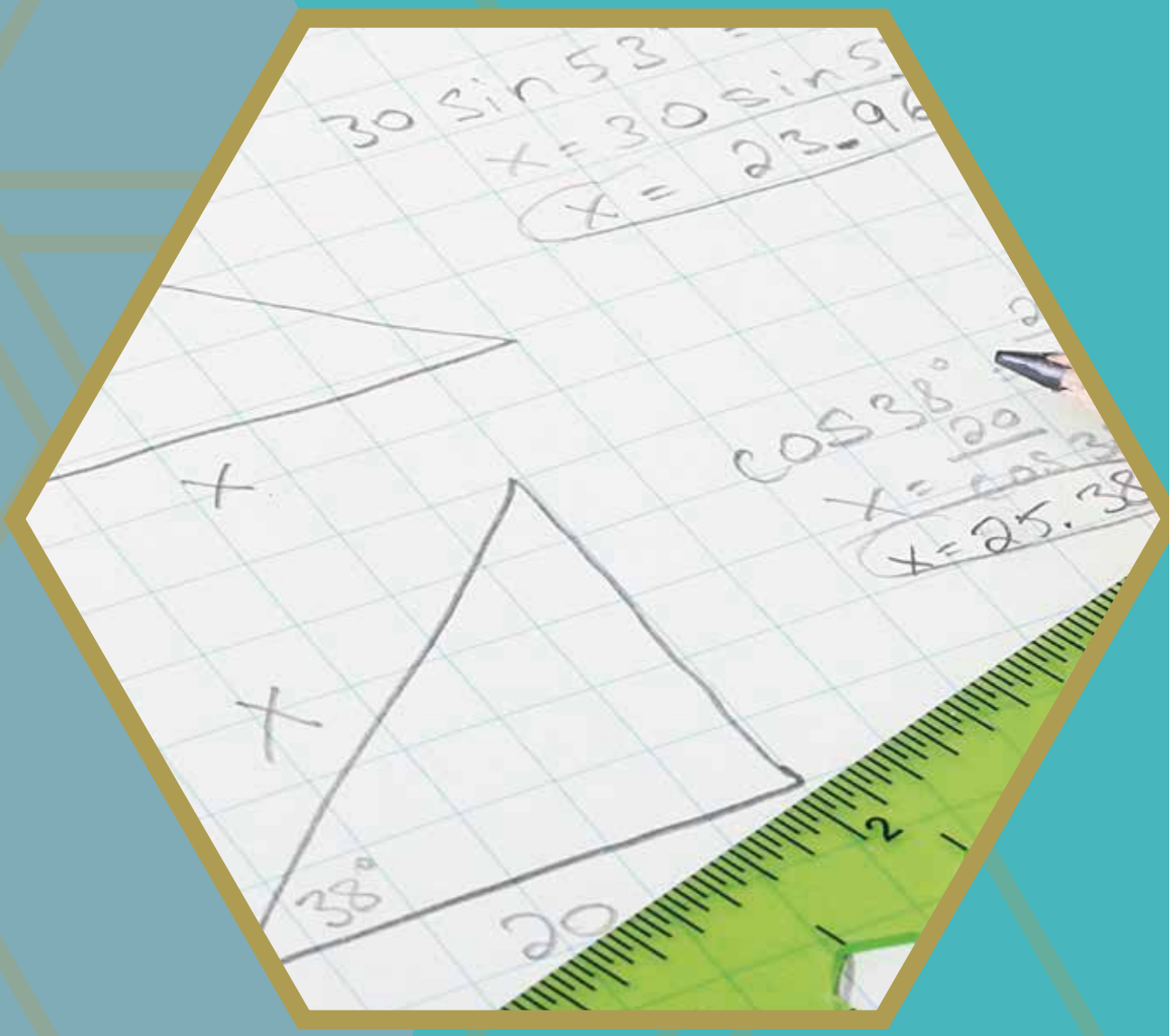
Universidad Autónoma
del Estado de México



Trigonometría

Libro de texto basado en competencias

José Luis Gerardo Valencia Aguilar · Domingo Hernández García
Juan Chávez Rosales · Ricardo Valdes Camarena
Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova
María Lilia Gonzaga Villalobos Jesús Ocampo Contreras
Edgar Jesús Rubelo Velásquez Alfonso Samuel Soteno Tahuilán

3er Semestre

Trigonometría

Libro de texto basado en competencias

Dirección de Publicaciones Universitarias
Editorial de la Universidad Autónoma del Estado de México

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

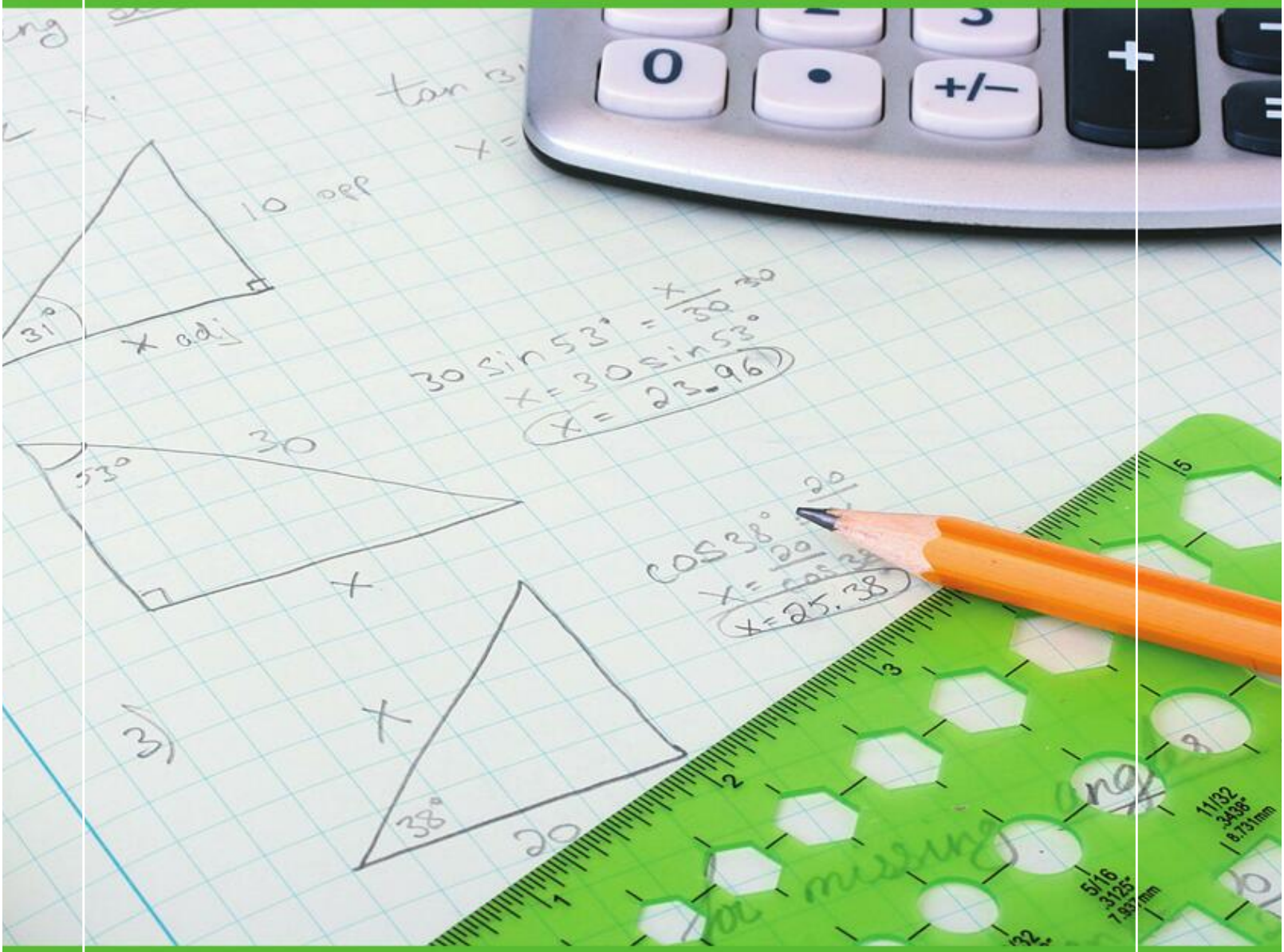
Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Administración
Jorge Eduardo Robles Alvarez
Director de Publicaciones Universitarias

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Trigonometría

Libro de texto basado en competencias



José Luis Gerardo Valencia Aguilar
Domingo Hernández García
Juan Chávez Rosales
Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova
María Lilia Gonzaga Villalobos
Jesús Ocampo Contreras
Edgar Jesús Rubelo Velásquez
Alfonso Samuel Soteno Tahuilán
Ricardo Valdes Camarena

Primera edición, julio 2021

TRIGONOMETRÍA
Libro de texto basado en competencias

Autores
José Luis Gerardo Valencia Aguilar
Plantel "Cuauhtémoc" de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Domingo Hernández García
Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana" de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Juan Chávez Rosales
Plantel "Nezahualcóyotl" de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Juan Manuel Gómez Tagle Fernández de Córdova
Plantel "Ignacio Ramírez Calzada" de la Escuela Preparatoria de la UAEM
María Lilia Gonzaga Villalobos
Plantel "Nezahualcóyotl" de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Jesús Ocampo Contreras
Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana" de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Edgar Jesús Rubelo Velásquez
Plantel "Dr. Pablo González Casanova", de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Alfonso Samuel Soteno Tahuilán
Plantel "Nezahualcóyotl" de la Escuela Preparatoria de la UAEM
Ricardo Valdes Camarena
Plantel "Lic. Adolfo López Mateos" de la Escuela Preparatoria de la UAEM

Universidad Autónoma del Estado de México
Av. Instituto Literario 100 Ote.
Toluca, Estado de México
C. P. 50000
Tel: (52) 722 277 38 35 y 36
http://www.uaemex.mx

El contenido de este material es responsabilidad de los autores, así como el tratamiento basado en competencias realizado a los libros de texto. Queda prohibida la reproducción o transmisión total o parcial del contenido de la presente obra, sin el consentimiento previo y por escrito del editor. La Universidad Autónoma del Estado de México se deslinda de cualquier acción legal derivada de este material.

® Derechos reservados, 2016

ISBN: 978-607-633-315-0

Hecho en México

Responsable del Programa de Diseño y Producción Editorial: L. D. G. Miguel Angel Conzuelo Endeje
Corrección de estilo: Daniela Arellano
Portada e interiores: Karla Mónica López
Colaboración: Itzel Veloz

Mensaje

A través de su historia, la Universidad Autónoma del Estado de México ha tenido como uno de sus objetivos fundamentales lograr que el estudiantado reciba una educación basada en el libre pensamiento, apelando a un sentido científico. La Escuela Preparatoria de la UAEM continuará mostrándose como un punto de inflexión para la comunidad estudiantil por la calidad de la educación que se ofrece al tiempo que se enseña a adquirir conocimientos, valores, habilidades y destrezas que favorezcan el entendimiento de nuestro entorno social y ambiental.

La responsabilidad de la Universidad Autónoma del Estado de México es asegurar que la educación que se imparte en la Escuela Preparatoria contribuya a ampliar el horizonte personal y profesional de los estudiantes. El enfoque para la apropiación del conocimiento parte de aprovechar la experiencia de vida y desde la autonomía de pensamiento y la reflexión lograr una comprensión más amplia de la realidad.

El material educativo que tienes en tus manos ha sido elaborado colegiadamente entre especialistas de cada una de las áreas del conocimiento. La creatividad, el pensamiento crítico y reflexivo, así como el espíritu científico del claustro de docencia e investigación se reúne en esta antología con el fin de que te acerques al conocimiento con una mirada crítica. Este ejemplar ha sido elaborado con el fin de establecer un aprendizaje dialógico que estimule tu curiosidad, que te sirva como guía, y que invariablemente te provoque pasión por el conocimiento.

El objetivo es lograr que recibas una educación integral e incluyente que incida de manera positiva en tu trayectoria escolar. Por ello es importante que asumas un compromiso personal, empeño y dedicación que te permita apropiarte del conocimiento.

Patria, Ciencia y Trabajo

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Índice

Módulo 1. Figuras geométricas 9

Introducción 11

1. Definición de figura geométrica 12

2. Clasificación de figuras geométricas 12
   2.1. Elementos de una figura geométrica 13
   2.2. Tipos de polígonos 15
      2.2.1. Cuadriláteros 17
      2.2.2. Clasificación de los cuadriláteros 18
      2.2.3. Paralelogramos 19
      2.2.4. Propiedades y características de los cuadriláteros 20
      2.2.5. Trapecios 20
      2.2.6. Trapezoides 20

3. Trazo de polígonos regulares 21
   3.1. Segmentos 21
   3.2. Rectas paralelas y perpendiculares 21
   3.3. Tipos de polígonos 22
      3.3.1. Pentágono 22
      3.3.2. Heptágono 23
      3.3.3. Octágono 24
      3.3.4. Decágono 25
      3.3.5. Triángulo 26

4. Áreas y perímetros de polígonos 27

Módulo 2. Ángulos y triángulos 37

Introducción 39
Historia de la Trigonometría 40

1. Ángulos y triángulos 44
   1.1. Sistemas de medición de ángulos 44
   1.2. Clasificación de ángulos 44
   1.3. Sistemas de medición 46
      1.3.1. Unidades angulares 46
   1.4. Congruencia ($\cong$) 48

2. Definición y notación de triángulo 50
   2.1. Clasificación de triángulos 50
      2.1.1. Por las longitudes de sus lados 50
      2.1.2. Por la amplitud de sus ángulos 51
   2.2. Rectas y puntos notables de un triángulo 52
      2.2.1. Localizar un punto equidistante de dos puntos dados 52
      2.2.2. Punto medio de un segmento 52
      2.2.3. Bisectar un ángulo 52

2.3. Semejanza 58
2.3.1. Semejanza de triángulos 58

3. Triángulo rectángulo 62
3.1. Teorema de Pitágoras 62
3.2. Razones trigonométricas 65
3.3. Valores exactos de las razones trigonométricas 66

4. Triángulo oblicuángulo 67
4.1. Ley de senos 67
4.2. Ley de cosenos 68

Módulo 3. Circunferencia 83

Introducción 85

1. Definición de circunferencia 87
1.1. Elementos básicos de la circunferencia 87

2. Medición de ángulos y arcos en una circunferencia 91

3. Sector circular 94

4. Gráficas de las funciones trigonométricas 107

5. Funciones trigonométricas (seno y coseno) 109
5.1. Variación de la función seno 110
5.2. Variación de la función coseno 113
5.3. Variación de la función tangente 122

Módulo 4. Identidades trigonométricas 125

Introducción 127

1. Definición de identidades trigonométricas 128

2. Tipos de identidades trigonométricas 129

3. Ejercicios con identidades trigonométricas 130
3.1. Simplificación de expresiones con identidades 131
3.2. Verificación de identidades 132
3.3 Ecuaciones trigonométricas 134

Bibliografía 145

Secuencia didáctica

Apertura	Bienvenida para romper el hielo y establecer un clima de confianza. Mencionar los propósitos de la actividad y cuáles son las competencias que se espera desarrolle el alumno. Revisar el ambiente de aprendizaje (espacio físico, disposición física del alumno, materiales y características de los alumnos). Dinamización mediante una pregunta detonadora y lluvia de ideas.
Presentación de la situación de aprendizaje	Situación de la vida cotidiana.
Conocimientos previos:	Indicar conceptos necesarios para resolver los problemas.
Desarrollo	Para el desarrollo del tema, el profesor actúa como mediador, aplicando la estrategia de solución de situaciones problema, apoyándose de material didáctico como presentaciones en power point, rotafolio, acetatos y pintarrón, lo cual permite que el alumno participe en forma activa, interactuando de manera colaborativa para lograr las competencias establecidas en la actividad. Se fomenta la motivación donde prevalezca un clima de confianza y seguridad para el alumno, se resaltan aciertos y se aprenden de los errores.
Cierre Conclusión: se realiza la retroalimentación del tema, se aclaran dudas y se realiza un resumen	La conclusión será redactada conjuntamente con los alumnos y el profesor. Evaluación: conocimientos, comprensión, planteamiento de problemas. Procedimental: desarrollo de habilidades para plantear y resolver ecuaciones. Actitudes y valores: disciplina, disposición para el trabajo individual y en equipo. Evidencia del desempeño: - Ejercicio resuelto. - Lista de control: se registran las evidencias de conocimientos, actitudes y valores de los alumnos. - Portafolio de evidencias. El profesor pasará lista conforme el alumno desarrolla su actividad, evaluando conocimientos, actitudes y valores.

Módulo 1

Figuras geométricas

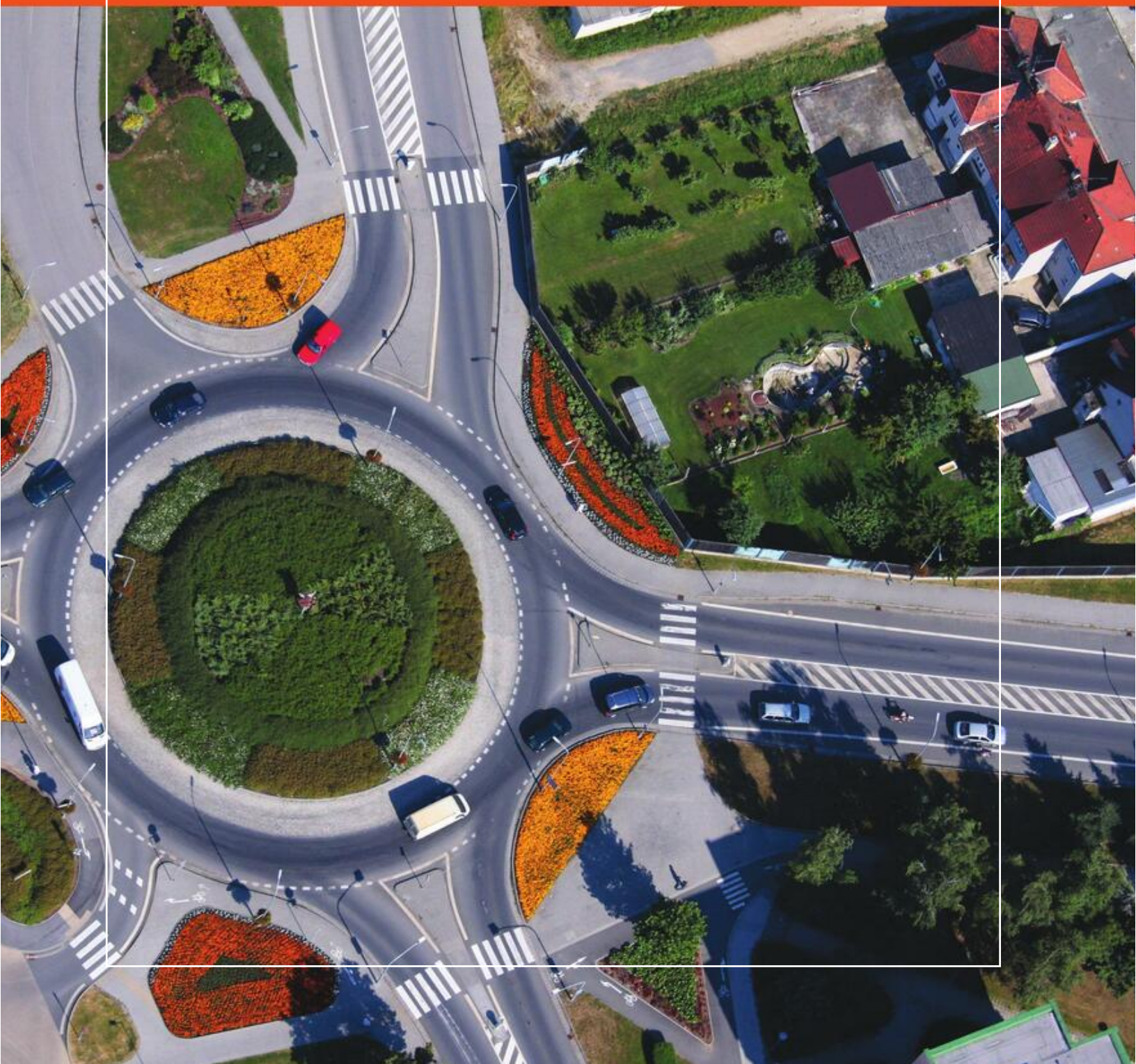


Diagrama de contenidos

M1
Basado en competencias

Propósito

Analizar los diferentes tipos de figuras geométricas y sus características, para identificarlas y relacionarlas con su entorno, así como calcular su área y perímetro.

Competencias

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Competencias genéricas y atributos

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

Introducción

"Uno de los aspectos sobresalientes de las matemáticas es que se utilizan para describir el mundo físico; auxiliándonos de esta ciencia podemos construir modelos matemáticos sencillos o complejos que predigan desde el movimiento de una partícula hasta el funcionamiento de una planta nuclear, verificando que el resultado predicho, siguiendo sólo reglas matemáticas, coincide con lo que se observa en nuestro entorno.

La capacidad de la aplicación de las matemáticas para encontrar una explicación lógica sobre los fenómenos que se presentan en el mundo nos sigue sorprendiendo, desde el conjunto de lo más pequeño, hasta aspectos macroscopicos. Las novedosas formas del carbono conocidas como fulerenos, están formadas por anillos de carbono, principalmente hexágonos, pero también pentágonos, heptágonos y octágonos. Mediante una fórmula sencilla puede predecirse la forma que tendrá cada una de estas moléculas. El C60 o buckmisterfelerero, formado por 60 átomos ordenados en 20 hexágonos y 12 pentágonos, tiene la forma exacta de un balón de futbol soccer; existen fulerenos esféricos de muchos más átomos, pero siempre obedecen reglas estrictas: el número de anillos 5, 6, 7 u 8 miembros está controlada por la misma ecuación.

De la cosmología a la nanotecnología, la geometría sigue siendo el mejor ejemplo del misterioso poder de las matemáticas para entender la estructura del mundo físico: lo dicho las matemáticas son intrigantes". Tomado de "¿Cómo ves?", año 10, núm. 18, en *Revista de Divulgación de la ciencia de la Universidad Nacional Autónoma de México*, p. 7.

1. Definición de figura geométrica

Una figura geométrica se define como un conjunto de puntos, las figuras geométricas son áreas cerradas por líneas o superficies en un plano o en el espacio.

Figura 1. Miró-Wand. Fuente: commons.wikimedia.org

¿Cuántos polígonos observas en la imagen?

_____

_____

_____

¿Qué polígonos observas en la figura anterior?

_____

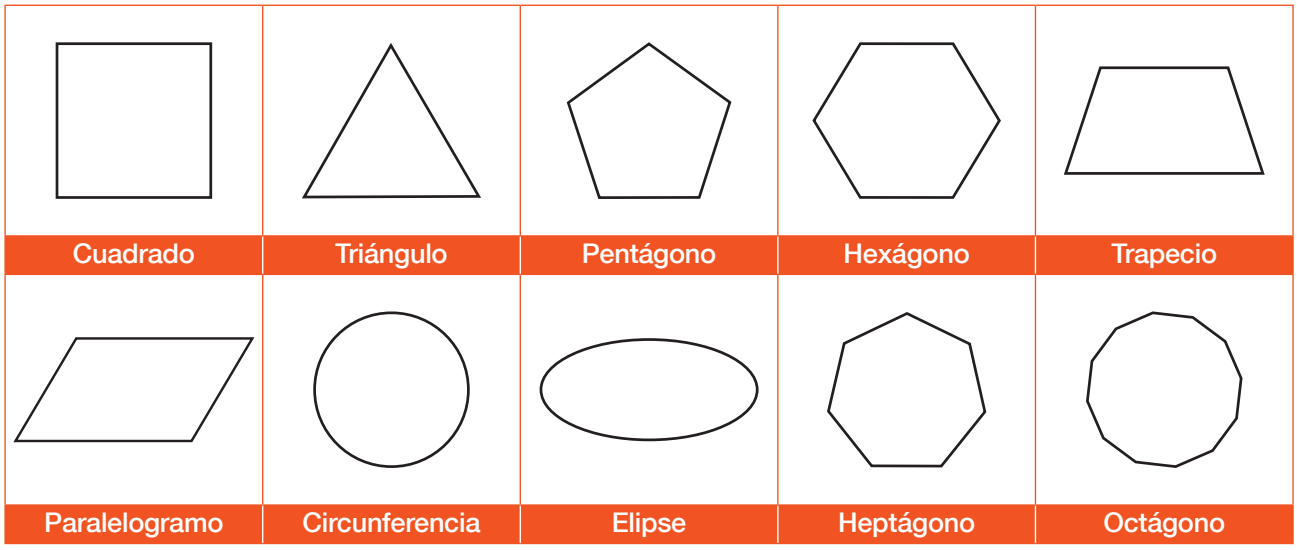
_____

_____

2. Clasificación de figuras geométricas

Los diferentes tipos de figuras geométricas planas y sólidas, en dos o tres dimensiones respectivamente, se forman mediante la combinación de otras figuras más elementales y de menores dimensiones, tales como la línea o el punto.

Figura 2. Tipos de figuras geométricas



Actividad:

Actividad
Módulo 1

Construir en un geoplano de 30 x 30 cm, 8 figuras geométricas de la figura 2, del tamaño que el docente solicite.

La rama de las matemáticas que estudia las propiedades y las medidas de las figuras en el espacio o en el plano, así como sus características: forma, extensión, posición relativa y propiedades se llama **Geometría.**

El cuadrado, el triángulo y el rectángulo, entre otras, son figuras geométricas planas, formadas por líneas rectas cerradas. El círculo también es una figura plana pero, a diferencia de las anteriores, está formado por una línea curva cerrada.

Por otro lado, se definen como puntos colineales aquellos que están sobre una misma línea recta; los que están en un mismo plano son puntos coplanares.

Las figuras geométricas planas son aquellas regiones cerradas por líneas no alineadas en un plano de dos dimensiones. Se clasifican principalmente en dos tipos:

Cónicas: delimitadas por una línea curva cerrada y plana que resulta de la intersección no degenerada entre un cono y un plano que no pasa por su vértice. Por ejemplo: el círculo y la elipse.

Polígonos: delimitados por el cruce de dos o más líneas rectas, con tres o más lados e igual cantidad de ángulos.

2.1. Elementos de una figura geométrica

Los elementos fundamentales de una figura geométrica son lados, vértices, ángulos centrales, ángulos interiores y exteriores.

- Lados: segmentos de recta que delimitan la figura geométrica.
- Vértice: puntos de intersección de dos lados de una figura geométrica.
- Ángulo central: formado por dos radios (la distancia del centro al vértice) consecutivos del polígono regular.

Si n es el número de lados de un polígono:

$$\text{ángulo central} = \frac{360^\circ}{n}$$

Ángulo interior: está formado por dos lados del polígono y su región angular queda en la región interior. El ángulo interior de un polígono regular de n lados se obtiene con la expresión:

$$\text{ángulo interior} = \frac{(n-2)180^\circ}{n}$$

La fórmula anterior indica que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a 180°.

El nombre de algunos polígonos y sus elementos se muestra en la siguiente tabla:

Nombre	Lados	Ángulo Interior
Triángulo (o trígono)	3	60°
Cuadrilátero (o tetrágono)	4	90°
Pentágono	5	108°
Hexágono	6	120°
Heptágono (o septágono)	7	128.571°
Octágono	8	135°
Nonágono (o eneágono)	9	140°
Decágono	10	144°
Endecágono (o undecágono)	11	147.273°
Dodecágono	12	150°

Tabla 1. Elementos de polígonos regulares
Fuente: elaboración propia

Actividad:

Investiga y completa la tabla siguiente con base en los datos mostrados en la tabla anterior.

Nombre	Lados	Ángulo Interior
	13	
	14	
Pentadecágono	15	156°
	16	
	17	
Octadecágono	18	160°
	19	
	20	
Triacontágono	30	168°
	40	
	50	
	60	
	70	
Octacontágono	80	175.5°
	90	
	100	

Ángulo exterior: los ángulos exteriores e interiores se miden sobre la misma línea, así que suman 180°. Por lo tanto, el ángulo exterior se obtiene en la forma:

$$\textit{Ángulo exterior} = 180° - \textit{ángulo interior}$$

2.2. Tipos de polígonos

En función de la medida de sus lados y ángulos, los polígonos se clasifican en regulares e irregulares. Un polígono es regular si todos sus lados poseen la misma longitud y sus ángulos son iguales.

Por propiedades, se clasifican según los siguientes criterios:

A) Por la medida de sus lados y ángulos:

Polígonos regulares: aquéllos que pueden inscribirse en una circunferencia, puesto que todos sus ángulos y lados son iguales (equiláteros y equiángulos).

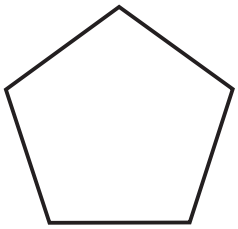


Figura 3. Polígono regular

Polígono equilátero: aquél con todos sus lados iguales, pero sus ángulos son de distinta medida.

Polígono equiángulo: aquél con todos sus ángulos iguales, pero sus lados tienen diferente longitud.

Polígonos irregulares: aquéllos cuyos vértices no se inscriben dentro de una circunferencia, ya que sus ángulos y lados son desiguales (no son equiláteros ni equiángulos). En general, las figuras geométricas irregulares más conocidas son: rectángulo, rombo, romboide, trapecios y todos los triángulos que no son equiláteros.

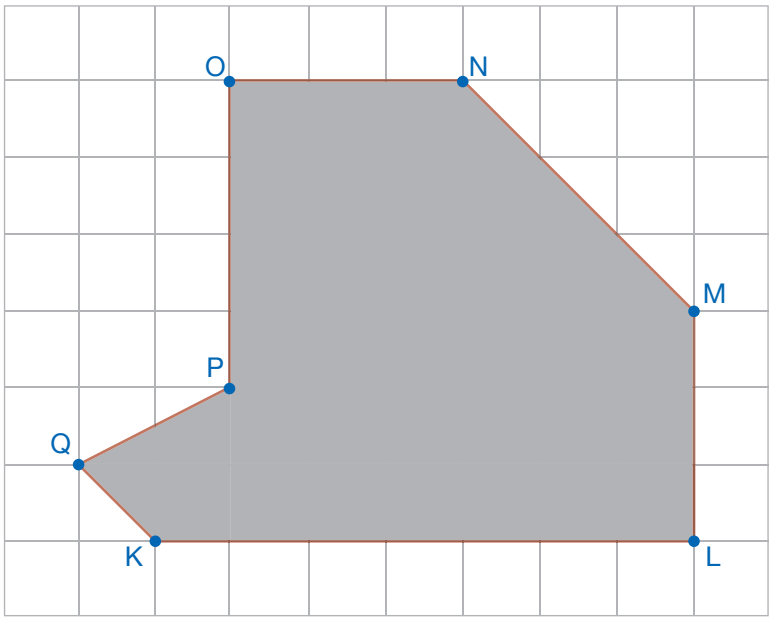


Figura 4. Polígono irregular

B) De acuerdo con sus ángulos interiores:

Polígonos convexos: aquéllos que cumplen las siguientes características:

- Todos sus vértices están dirigidos hacia fuera de la figura geométrica.
- Sus ángulos interiores son siempre menores a 180°.
- Todas sus diagonales (línea recta que une dos vértices no consecutivos) quedan dentro del polígono.
- Al prolongar sus lados nunca se cruzan con otro lado.
- Una línea recta no puede cruzar al polígono en más de dos puntos.

Estas figuras son el pentágono regular o el hexágono regular.

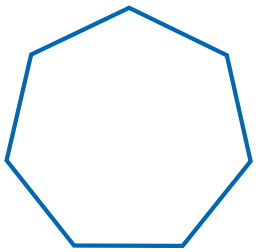


Figura 5. **Polígono convexo**

Polígonos cóncavos: aquéllos que se caracterizan porque:

- Tienen al menos un ángulo interior mayor a 180°.
- La prolongación de cualquiera de sus lados corta al menos a uno de ellos.
- Las diagonales se pueden hallar fuera de la figura geométrica.

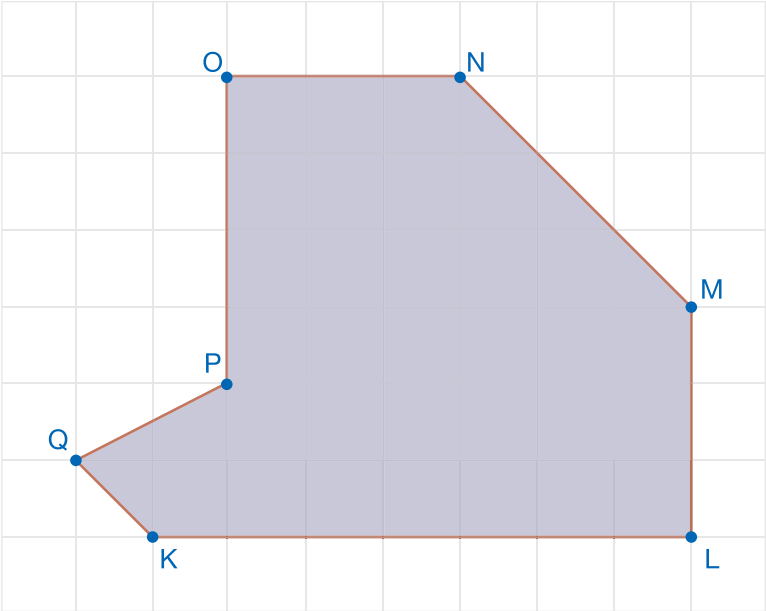


Figura 6. Polígono cóncavo

C) Según su eje de simetría:

Polígono simétrico: se puede dividir con una línea en dos partes iguales.

Polígono asimétrico: no se puede dividir con una línea en dos partes iguales.

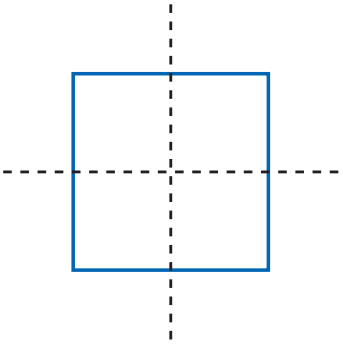


Figura 7. Polígono simétrico

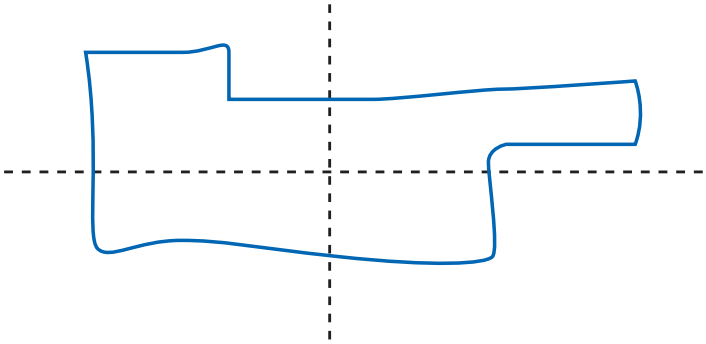


Figura 8. Polígono asimétrico

D) Por el número de lados o ángulos:

Triángulo: tres lados y tres ángulos.
Cuadrilátero: cuatro lados y cuatro ángulos.
Pentágono: cinco lados e igual número de ángulos.
Hexágono: seis lados e igual número de ángulos.
Heptágono: siete lados e igual número de ángulos.
Octágono: ocho lados e igual número de ángulos.
Eneágono: nueve lados e igual número de ángulos.
Decágono: diez lados e igual número de ángulos.
Endecágono: once lados e igual número de ángulos.
Dodecágono: doce lados e igual número de ángulos.
Tridecágono: trece lados e igual número de ángulos.
Tetradecágono: catorce lados e igual número de ángulos.
Pentadecágono: quince lados e igual número de ángulos.
Hexadecágono: dieciséis lados e igual número de ángulos.
Heptadecágono: diecisiete lados e igual número de ángulos.
Octadecágono: dieciocho lados e igual número de ángulos.
Eneadecágono: diecinueve lados e igual número de ángulos.
Icoságono: veinte lados e igual número de ángulos.

¿Sabías que?
Módulo 1

El área de los polígonos regulares se obtiene triangulando el polígono y sumando las áreas de los triángulos obtenidos.

2.2.1. Cuadriláteros

Los cuadriláteros son polígonos, figuras geométricas planas, delimitados por cuatro segmentos de recta (llamados lados) que se interceptan en cuatro puntos no alineados (llamados vértices).

Todos los cuadriláteros tienen cuatro lados, cuatro ángulos interiores, cuatro ángulos exteriores, cuatro vértices y dos diagonales (segmentos que unen los vértices opuestos).

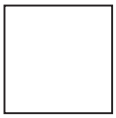
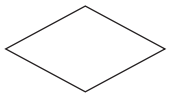
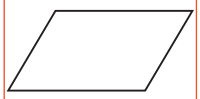
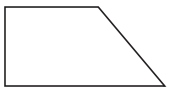
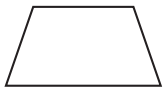
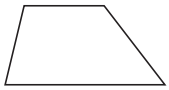
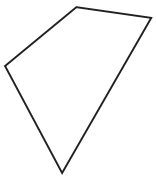
Cuadriláteros	Lados son paralelos	Paralelogramos	4 lados iguales y 4 ángulos rectos		Cuadrado
			Lados iguales dos a dos y 4 ángulos rectos		Rectángulo
			4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos		Rombo
			Lados y ángulos iguales dos a dos		Romboide
	Solo tienen dos lados paralelos	Trapecios	Un lado no paralelo perpendicular a los lados paralelos		Trapecio rectángulo
			Lados no paralelos iguales		Trapecio isósceles
			Lados no paralelos desiguales y no perpendiculalres a los paralelos		Trapecio escaleno
	Los lados no son paralelos	Trapezoides			

Tabla 2. Clasificación de los cuadriláteros
Fuente: elaboración propia

2.2.2. Clasificación de los cuadriláteros

Los cuadriláteros varían en su forma y se pueden clasificar según:

- La medida de sus ángulos interiores.
- El paralelismo entre sus lados.
- La longitud de sus lados.

Según sus ángulos interiores, se distinguen dos tipos de cuadriláteros:

Cóncavos: en este tipo de cuadrilátero uno de los ángulos es mayor de 180º, por lo que es posible encontrar dos puntos interiores a un cuadrilátero cóncavo con un segmento que los una con puntos exteriores a la figura.

Convexos: son aquellos en que los ángulos interiores son menores de 180º, lo cual significa que dados dos puntos cualesquiera interiores a un cuadrilátero convexo, el segmento que los une tendrá todos sus puntos dentro de la figura.

Sin embargo, la manera más habitual de clasificar los tipos cuadriláteros, en general, y los cuadriláteros convexos, en particular, es según el paralelismo de sus lados, por lo cual se les da el nombre de paralelogramos.

2.2.3. Paralelogramos

Son aquellos que tienen dos pares de lados paralelos (cuadrado, rectángulo, rombo y romboide).

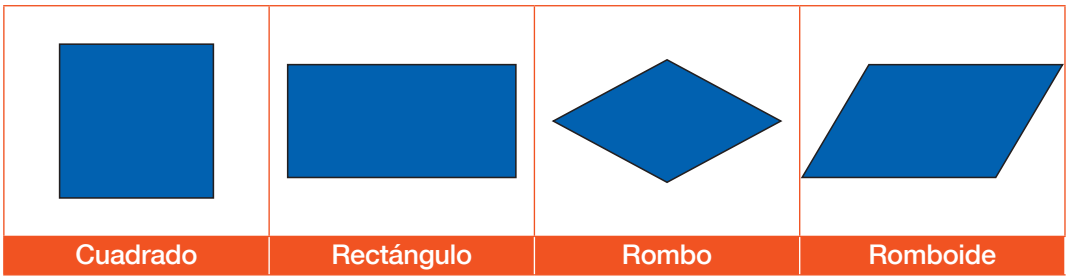


Figura 9. Paralelogramos

Cuadrado: tiene cuatro lados de igual longitud, por consiguiente, sus cuatro ángulos son del mismo tamaño y la medida de cada uno de sus ángulos es de 90°.

Rectángulo: tiene cuatro lados, dos de ellos son largos (estos son paralelos) comparados con los otros dos que son más cortos (también paralelos).

Para dibujar un rectángulo debemos recordar que tiene dos lados iguales, largos y dos cortos, también iguales entre sí, cuatro ángulos iguales de 90° y cuatro vértices.

Actividad:

Pega tres rombos de diferente tamaño.

Actividad
Módulo 1

Actividad
Módulo 1

Actividad:

Pega tres romboides de diferente tamaño.

M1
Basado en competencias

2.2.4. Propiedades y características de los cuadriláteros

- La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero convexo es igual a 360º:
- A + B + C + D = 360º.
- Las diagonales de un cuadrilátero convexo se cortan.
- Todo cuadrilátero convexo puede expresarse como la unión de dos triángulos con una de las diagonales como lado común.
- Si los puntos medios de todos los lados de un cuadrilátero se unen con cuatro segmentos, entonces éstos forman un paralelogramo.
- Si un segmento se forma por la intersección de las diagonales de un cuadrilátero y une dos lados opuestos, determina dos cuadriláteros con un lado común.
- Si un cuadrilátero está circunscrito, la suma de sus lados opuestos es igual: AB + CD = BC + DA.
- Si un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia, la suma de sus ángulos opuestos es igual a 180º.
- Si ABCD es un cuadrilátero inscrito y AB es su diámetro, entonces las proyecciones de sus lados AD y BC sobre la recta CD son iguales.

2.2.5. Trapecios

Son aquellos que tienen un par de lados paralelos y se clasifican en:
- Trapecio isósceles: 2 lados de igual medida, 2 ángulos basales iguales trapecio
- Trisolátero: 3 lados de igual medida, 2 pares de ángulos basales iguales
- Trapecio rectángulo: ángulos basales rectos (90º)
- Trapecio escaleno: lados y ángulos de distinta medida.

2.2.6. Trapezoides

Se clasifican en tres tipos:
- Trapezoides: no tienen lados paralelos
- Trapezoide simétrico o deltoide: 2 de sus lados tienen igual medida
- Trapezoide asimétrico o irregular: todos los lados son de distinta medida.

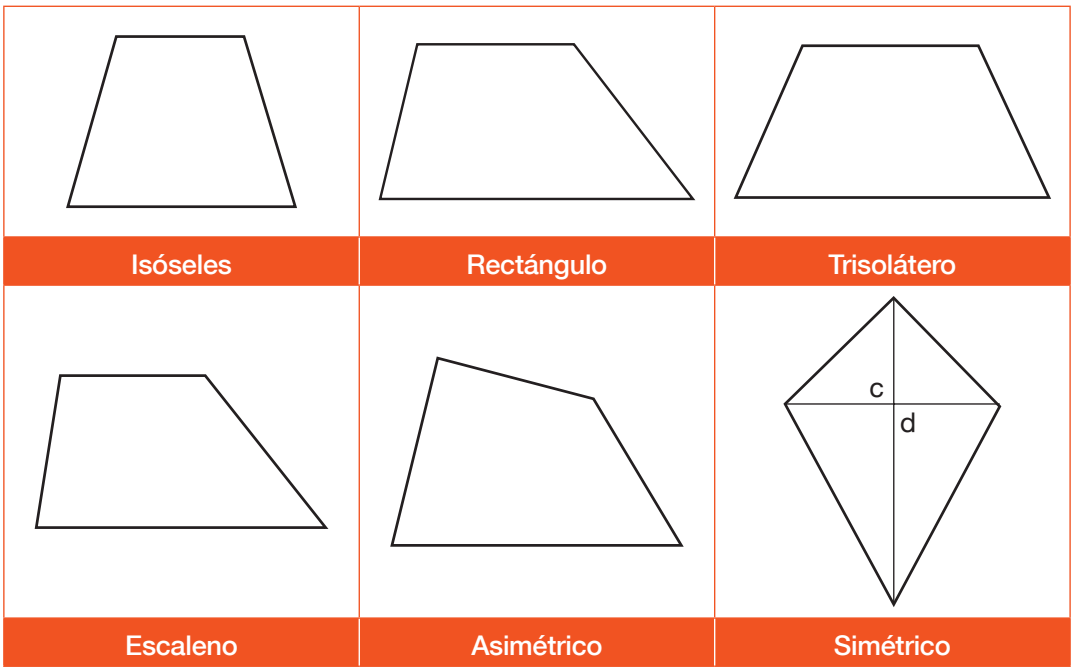
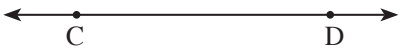


Figura 10. Tipos de trapezoides

3. Trazo de polígonos regulares

3.1. Segmentos

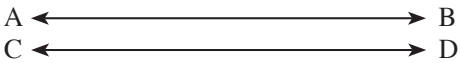
Un segmento es la porción de una recta limitada por dos puntos no coincidentes.



Segmento $\overline{CD}$

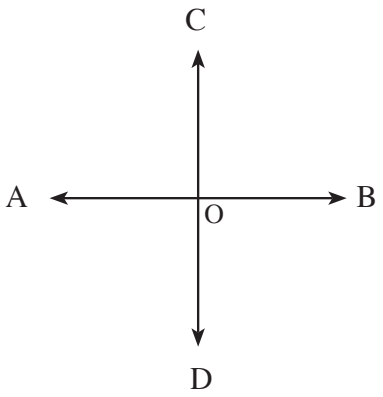
3.2. Rectas paralelas y perpendiculares

Definición 1. Dos rectas son paralelas si y sólo sí son coplanares y no se intersectan. Si queremos indicar que dos rectas l_1 y l_2 son paralelas, se denota en la forma $l_1 \| l_2$.



$\overline{AB} \| \overline{CD}$

Definición 2. Dos rectas son perpendiculares si al cortarse forman cuatro ángulos rectos (90°). Se utiliza el símbolo $\perp$ para denotar que una recta es perpendicular a otra.



Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ entonces

$$\angle AOC = \angle COB = \angle BOD = \angle DOA = 90^{\circ}$$

3.3. Tipos de polígonos

3.3.1. Pentágono

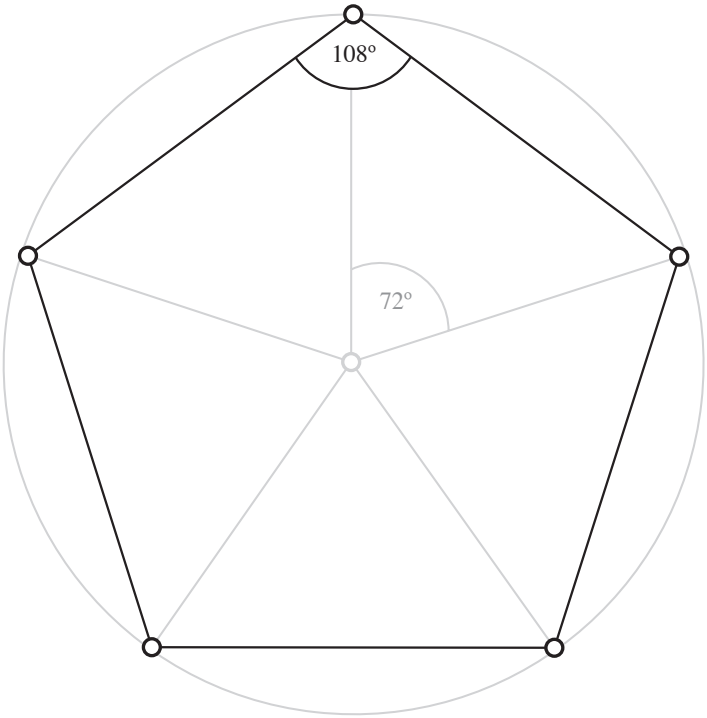


Figura 16. Pentágono regular

El pentágono es una figura geométrica plana; está delimitado por cinco segmentos de recta (llamados lados) que se interceptan en cinco puntos no alineados (llamados vértices). Por lo tanto, todos los pentágonos tienen cinco lados, cinco vértices y cinco ángulos interiores y exteriores, respectivamente.

La suma de los ángulos interiores de un pentágono es siempre igual a 540°. De acuerdo con la medida de sus ángulos interiores, los pentágonos se pueden dividir en convexos y cóncavos.

- Pentágono convexo: aquél sin ángulos interiores obtusos (mayores a 180°).

- Pentágono cóncavo: aquél con un ángulo interior obtuso. Los pentágonos cóncavos pueden además ser regulares o irregulares según las medidas de sus ángulos y lados.

Pentágono regular e irregular

- Pentágono regular: aquél siempre convexo, con todos sus lados y ángulos iguales entre sí. Su ángulo interior mide 108º y su ángulo central 72º.

- Pentágono irregular: aquél que no tiene todos sus lados y ángulos iguales, puede ser cóncavo, además de convexo.

3.3.2. Heptágono

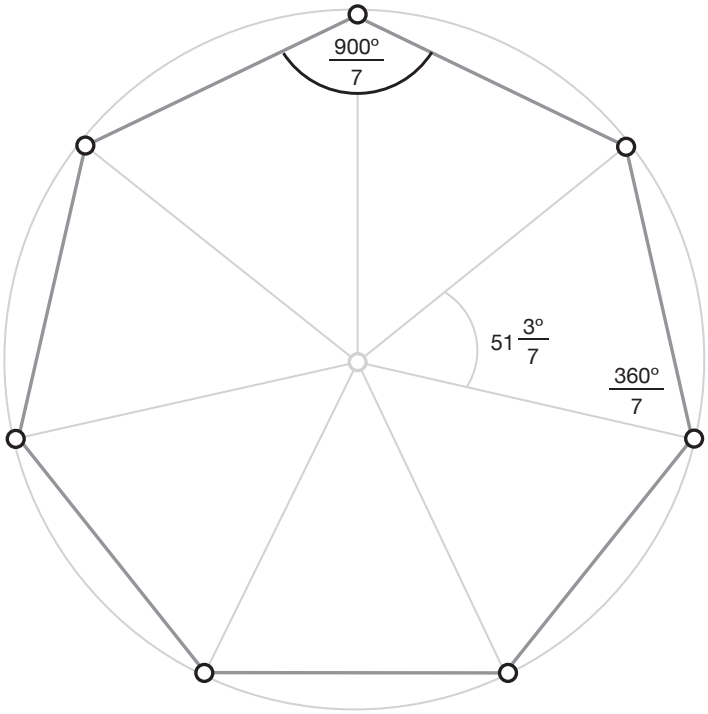


Figura 17. Heptágono regular.

El heptágono es una figura geométrica plana, delimitada por siete segmentos de recta (llamados lados) que se interceptan en siete puntos no alineados (llamados vértices). Por lo tanto, todos los heptágonos tienen siete lados, siete vértices, siete ángulos interiores y exteriores, respectivamente, y 14 diagonales.

La suma de los ángulos interiores de un heptágono resulta siempre igual a 900º. De acuerdo con la medida de sus ángulos interiores, los heptágonos se pueden dividir en convexos y cóncavos.

- Heptágono convexo: aquél sin ángulos interiores obtusos (mayores a 180º).

- Heptágono cóncavo: aquél con un ángulo interior obtuso. Los heptágonos cóncavos pueden ser regulares o irregulares según las medidas de todos sus ángulos y lados.

Heptágono regular e irregular

- Heptágono regular: aquél siempre convexo, con sus siete lados y ángulos iguales entre sí. Su ángulo interior mide 128,57º y su ángulo central 51,43º.

- Heptágono irregular: aquél que no tiene todos sus lados y ángulos iguales, puede ser cóncavo, además de convexo.

3.3.3. Octágono

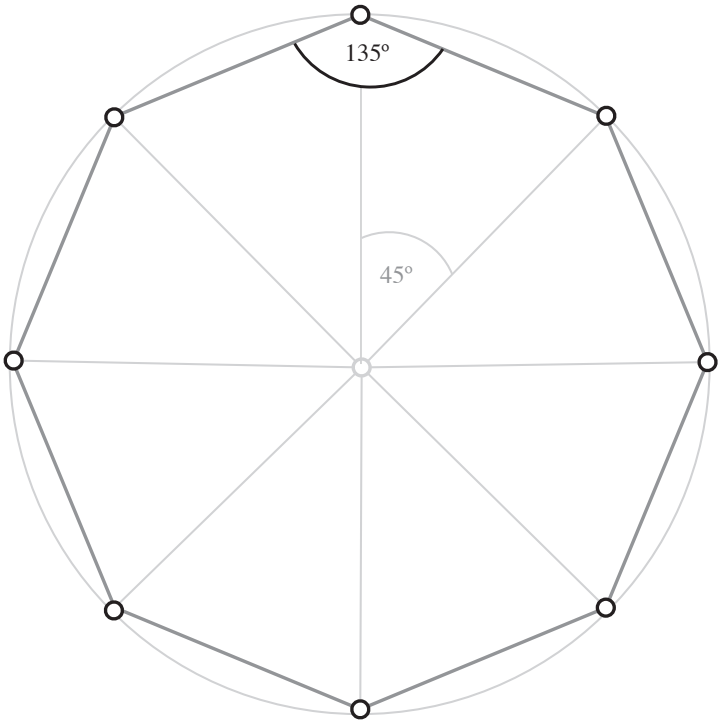


Figura 18. Octágono regular

El octágono es una figura geométrica plana, delimitada por ocho segmentos de recta (llamados lados) que se interceptan en ocho puntos no alineados (llamados vértices). Un octágono tiene ocho lados, ocho vértices, ocho ángulos interiores y exteriores, respectivamente, y 20 diagonales.

La suma de los ángulos interiores de un octágono es siempre igual a 1080º. Según la medida de sus ángulos interiores, los octágonos se pueden dividir en convexos y cóncavos.

- Octágono convexo: aquél que no tiene ángulos interiores obtusos (mayores a 180º).

- Octágono cóncavo: aquél que tiene un ángulo interior obtuso. Los octágonos cóncavos pueden ser, además, regulares o irregulares según las medidas de todos sus ángulos y lados.

Octágono regular e irregular

- Octágono regular: aquél siempre convexo, con sus ocho lados y ángulos iguales entre sí. Su ángulo interior mide siempre 135º y su ángulo central 45º.

- Octágono irregular: aquél que no tiene todos sus lados y ángulos iguales, puede ser cóncavo además de convexo.

3.3.4. Decágono

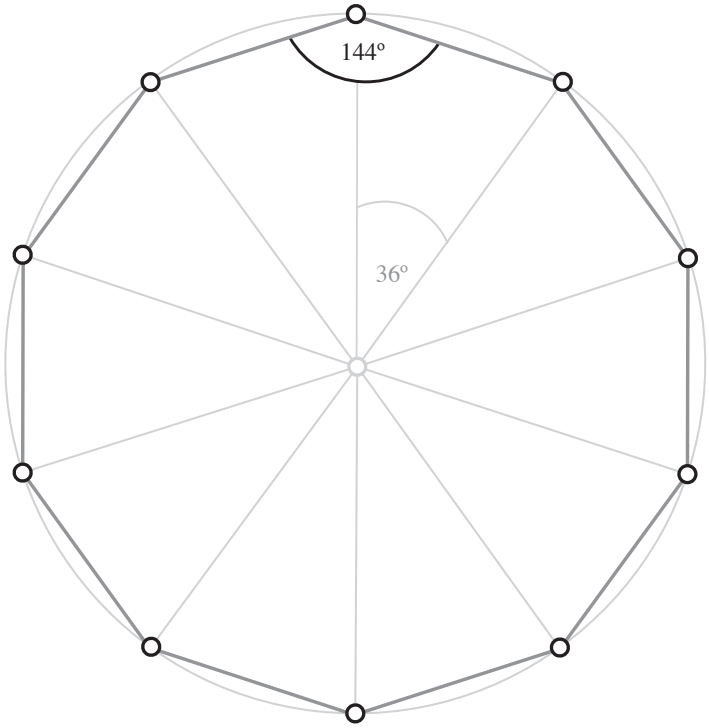


Figura 19. Decágono regular

El decágono es una figura geométrica plana, delimitada por 10 segmentos de recta (llamados lados) que se interceptan en 10 puntos no alineados (llamados vértices). Un decágono tiene 10 lados, 10 vértices, 10 ángulos interiores y exteriores, respectivamente, y 35 diagonales.

La suma de los ángulos interiores de un decágono es siempre igual a 1440º. Según la medida de sus ángulos interiores, los decágonos se pueden dividir en convexos y cóncavos.

- Decágono convexo: aquél sin ángulos interiores obtusos (mayores a 180º).

- Decágono cóncavo: aquél con un ángulo interior obtuso. Los decágonos cóncavos pueden, además, ser regulares o irregulares según las medidas de todos sus ángulos y lados.

Decágono regular e irregular

- Decágono regular: aquél siempre convexo, con sus 10 lados y ángulos iguales entre sí. Su ángulo interior mide siempre 144º y su ángulo central, 36º. Una característica particular de esta figura es que el lado de un decágono regular inscrito dentro de una circunferencia es igual a la sección aúrea de su radio.

- Decágono irregular: aquél que no tiene todos sus lados y ángulos iguales, puede ser cóncavo además de convexo.

3.3.5. Triángulo

El triángulo es una figura geométrica plana, delimitada por tres segmentos de recta (llamados lados) que se interceptan en tres puntos no alineados (llamados vértices). Por lo tanto, todos los triángulos tienes tres lados, tres vértices y tres ángulos internos.

Las características y propiedades de los triángulos son:

- Un lado de un triángulo es siempre menor a la suma de los otros dos lados ($a < b + c$), pero mayor que su diferencia ($a > b - c$).
- La suma de todos los ángulos interiores de un triángulo resulta siempre igual a 180º ($A + B + C = 180º$).
- El ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.
- A mayor lado en un triángulo, se opone también mayor ángulo.
- En un triángulo con los lados iguales, sus ángulos son también iguales.

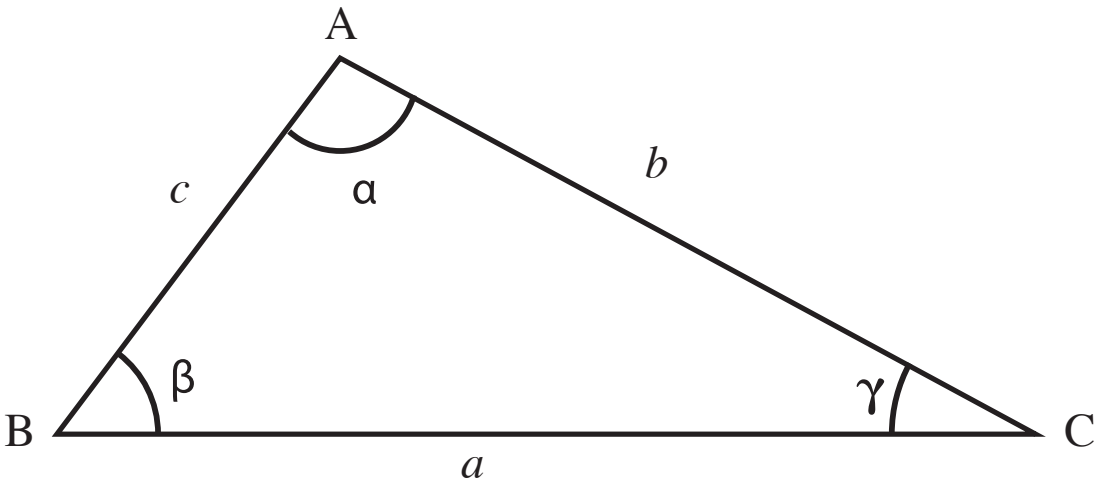
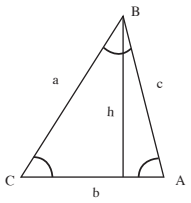
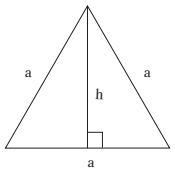
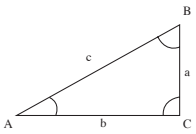
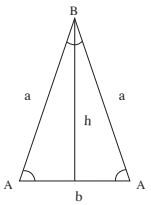
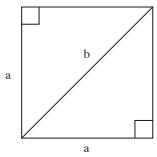
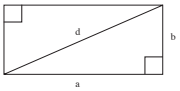
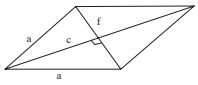


Figura 20. Elementos del triángulo.

4. Área y perímetro de polígonos

El perímetro (P) de cualquier figura geométrica es la suma de las medidas de sus lados. Se expresa en unidades de longitud, que en el Sistema Internacional de Unidades son metros, y en el Sistema CGS (centímetro, gramo, segundo) son centímetros.

Por otro lado, el área (A) de cualquier figura geométrica es la medida de la porción del plano que la constituye. Se expresa en unidades de longitud al cuadrado. En el Sistema Internacional de Unidades, el área se mide en m^2; mientras que en el Sistema CGS se mide en cm^2.

Nombre	Figura	Área	Perímetro	Notación
Triángulo escaleno		$A = \frac{bh}{2}$ $A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$	$P = a + b + c$ $S = \frac{a+b+c}{2}$	a, b, c = *lados* h = *altura* P = *perímetro* S = *semiperímetro*
Triángulo equilátero		$A = 0.433\ a^2$	$P = 3a$	a = lado
Triángulo rectángulo		$A = \frac{ab}{2}$	$P = a + b + c$	a, b = catetos c = hipotenusa
Triángulo isósceles		$A = \frac{bh}{2} = \frac{a \cdot b \cdot sen(A)}{2}$	$P = 2a + b$	a, b = lados h = altura
Cuadrado		$A = a^2$	$P = 4a$	a = lado
Rectángulo		$A = ba$	$P = 2(a + b)$	a = altura b = base
Rombo		$A = \frac{Dd}{2}$	$P = 4a$	a = lado d = diagonal mayor D = diagonal mayor

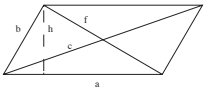
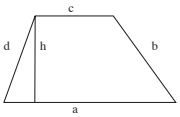
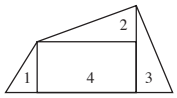
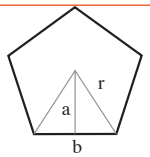
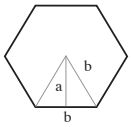
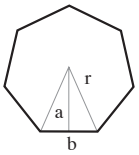
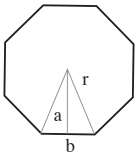
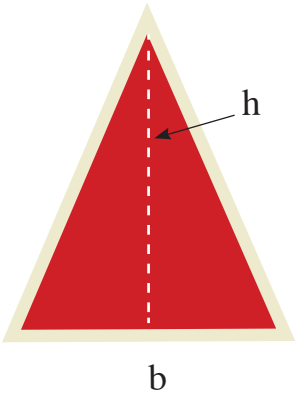
Nombre	Figura	Área	Perímetro	Notación
Paralelogramo		$A = bh$	$P = 2(a + b)$	a y b = lados h = altura
Trapecio		$A = \left(\frac{a+c}{2}\right)h$	$P = a + b + c + d$	a, b, c, d = lados a y c = lados paralelos h = altura
Cuadrilátero cualquiera		$A = \frac{1}{4}\sqrt{a(D_1D_2)^2 - (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2}$	$P = a + b + c + d$	a, b, c, d = lados D_1 y D_2 = Diagonales
Polígonos regulares	 Pentágono  Hexágono  Heptágono  Octágono	En general: $A = \frac{Pa}{2}$ Apotema $a = \sqrt{(radio)^2 - (lado/2)^2}$ Pentágono: $A = 1.721\ b^2$ Hexágono: $A = 2.598\ b^2$ Heptágono: $A = 3.634\ b^2$ Octágono: $A = 4.828\ b^2$ Eneágono: $A = 6.182\ b^2$ Decágono: $A = 7.694\ b^2$	$P = n\ b$	b = lado a = apotema n = número de lados

Tabla 5. Elementos, áreas y perímetros de figuras planas.
Fuente: elaboración propia

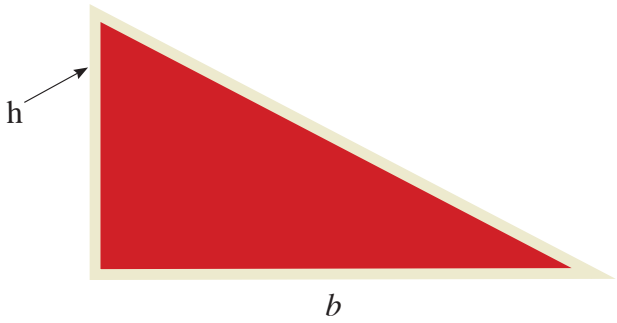
Actividad:

Calcula el área de las siguientes figuras geométricas



1.1. Si b = 21 cm, h = 15 cm

1.2. Si b = 18 m, h = 7 m



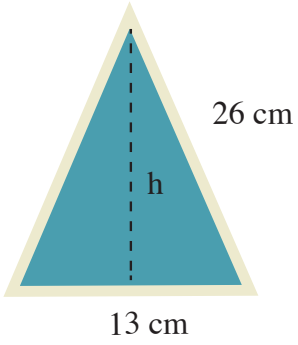
1.3. Si b = 10 cm, h = 3 cm

1.4. Si b = 12 m, h = 12 m

Actividad:

1. Con base a los ejercicios resueltos, obtén el área de los que se proponen a continuación:

a)



Para la altura $h = \sqrt{26^2 - 13^2}$

$h = 22.51$ cm

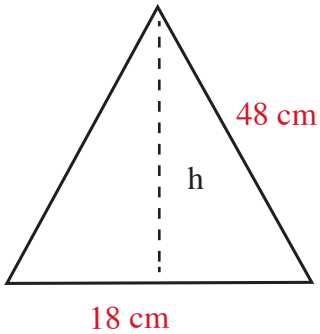
Para el área $A = \frac{bh}{2}$

Por lo que $A = \frac{(13)(22.51)}{2}$

Se obtiene

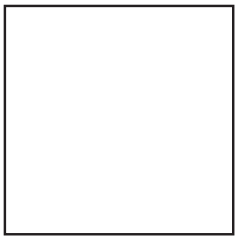
$A = 146.31$ cm^2

b)



M1 Basado en competencias

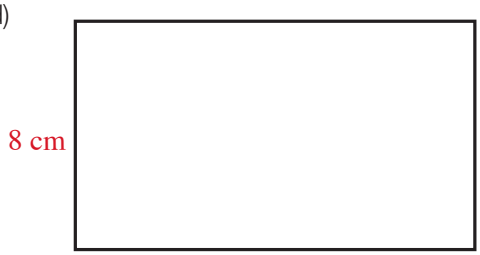
c)



$A = 7 \times 7$

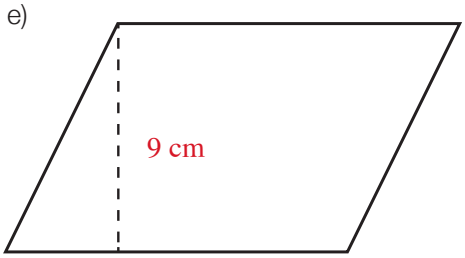
$= 49$ dm^2

d)



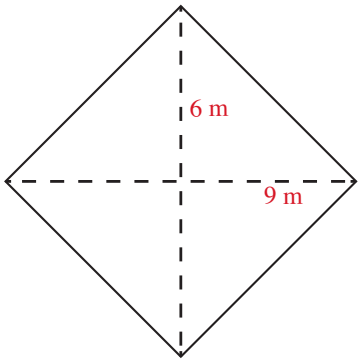
A=

e)



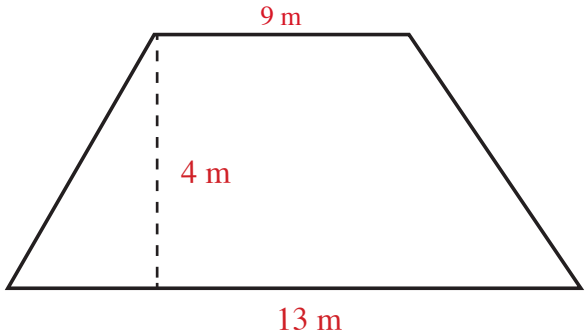
A=

f)



A =

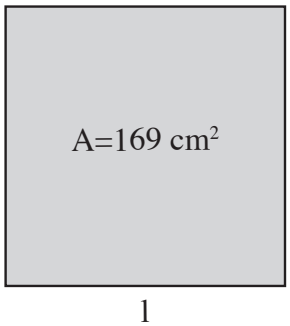
g)



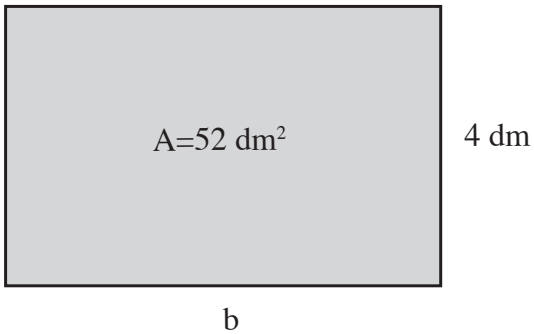
A =

2. Resuelve los ejercicios indicando de forma clara y ordenada el procedimiento respectivo.

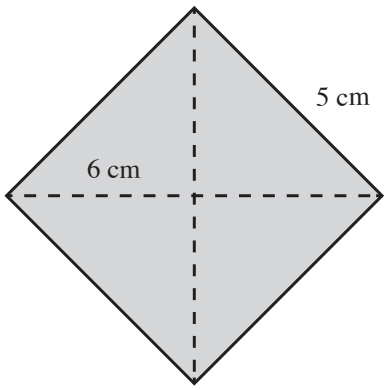
a) El lado de un cuadrado cuya área es 169 cm^2



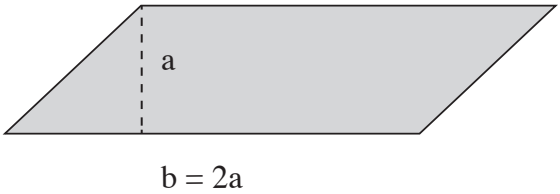
b) Qué valor tiene la base de un réctangulo que tiene 52 dm^2 de área y 4 dm de altura



c) El área de un rombo que tiene 5 cm de lado y 6 cm de diagonal menor



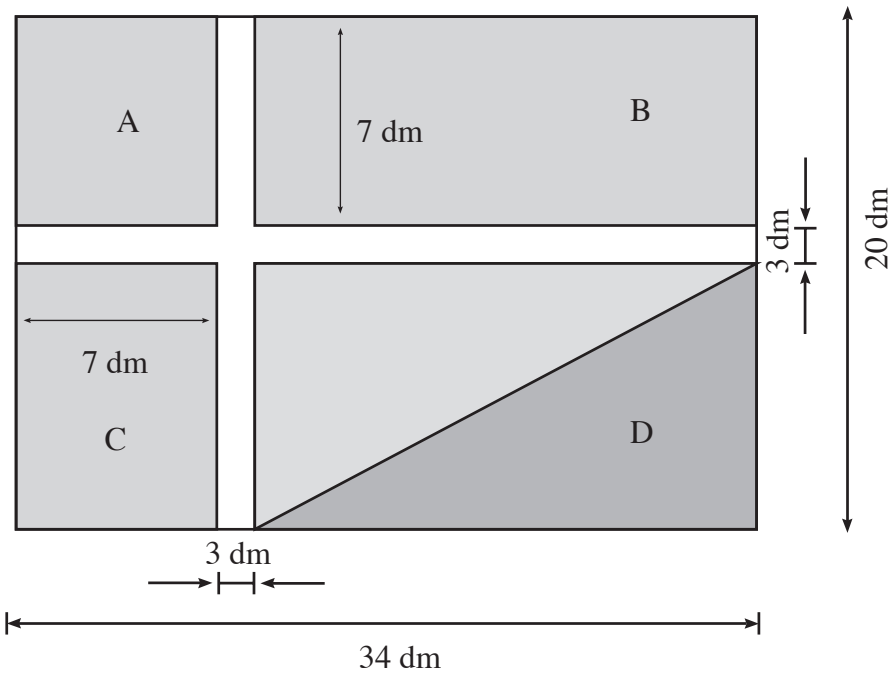
d) El área de un romboide cuya base y altura suman 12 cm y la base mide el doble



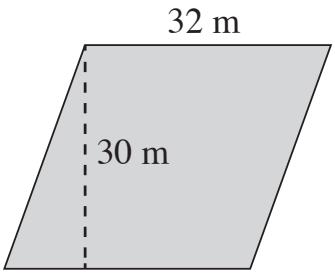
3. Determina el número de losetas cuadradas que hay en un salón rectangular de 6 m de largo y 4,5 m de ancho, si cada loseta mide 30 cm de lado.

4. Determina cuál es el precio de un mantel cuadrado de 3,5 m de lado, si el m^2 de tela cuesta 123.56 pesos.

5. Determina el área del cuadrado A, de los rectángulos B y C y el triángulo D de la figura.



6. Determina el número de árboles que se pueden plantar en un campo como el de la figura, de 32 m de largo y 30 m de ancho, si cada árbol necesita para desarrollarse 4 m^2.

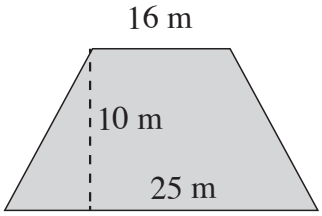


7. Determina lo que se pide en cada inciso:
   a) La longitud de las diagonales de un rombo inscrito en un rectángulo de 210 cm^2 de área y 30 cm de largo.

   b) El área del rombo.

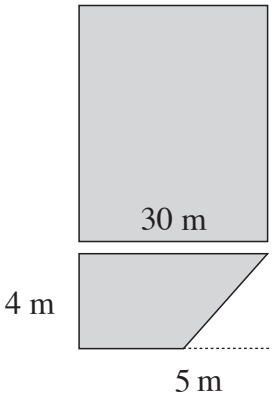
   c) ¿Qué relación existe entre el área del rectángulo y la del rombo inscrito en él?

8. Determina lo que costará sembrar pasto en un jardín como el de la figura, si el metro cuadrado de pasto plantado cuesta 768.87 pesos.



9. Una piscina tiene 210 m^2 de área y está formada por un rectángulo para los adultos y un trapecio para los niños. Observa el dibujo y calcula:
   a) El área de cada zona de la piscina.

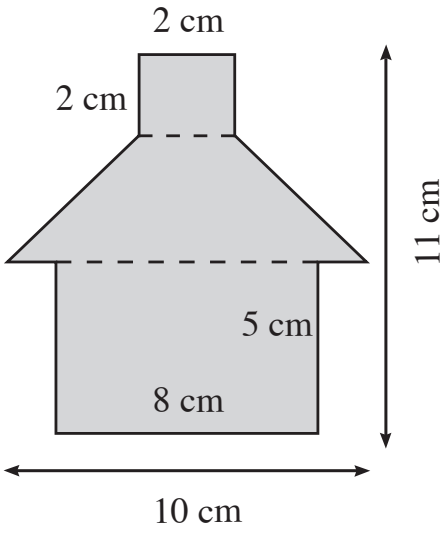
   b) La longitud de la piscina de adultos.



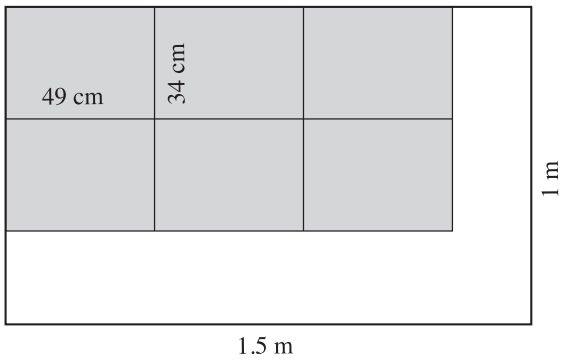
10. María está tejiendo una bufanda de rayas trasversales (el ancho es por el lado mayor de la bufanda) de muchos colores. La bufanda mide 120 cm de largo y 30 cm de ancho, y cada franja mide 8 cm de ancho.
    a) ¿Cuántas rayas de colores tiene la bufanda?
    b) Calcula el área de cada franja y el área total de la bufanda.

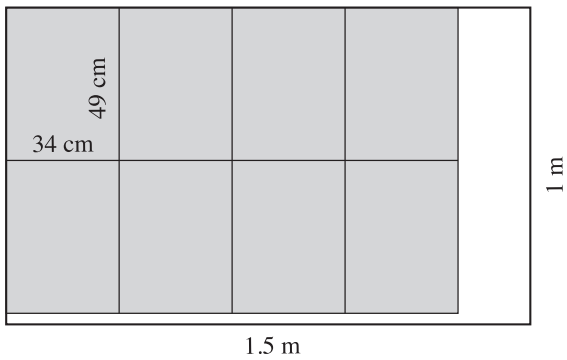
11. Las casillas cuadradas de un tablero de ajedrez miden 4 cm de lado. Calcula cuánto miden el lado y el área del tablero de ajedrez.

12. Observa la figura y calcula el área total:



13. Juan y Mario están forrando sus libros. Cada uno tiene un rollo de plástico de 1.5 m de largo y 1 m de ancho. Necesitan para cada libro un rectángulo de 49 cm de largo y 34 cm de ancho. Observa en los dibujos cómo han cortado cada uno los rectángulos.





a) Calcula en cada caso cuántos cm^2 de plástico les han sobrado.
b) ¿Quién ha aprovechado mejor el rollo de plástico para forrar?

Resumen

Resumen
Módulo 1

En este capítulo se estudiaron las diferentes figuras geométricas así como sus elementos y su clasificación de acuerdo con sus lados y ángulos.

Se aprendió la forma de obtener las áreas y perímetros de los diferentes polígonos regulares e irregulares. Así mismo, la aplicación de los polígonos y sus características en el entorno que nos rodea.

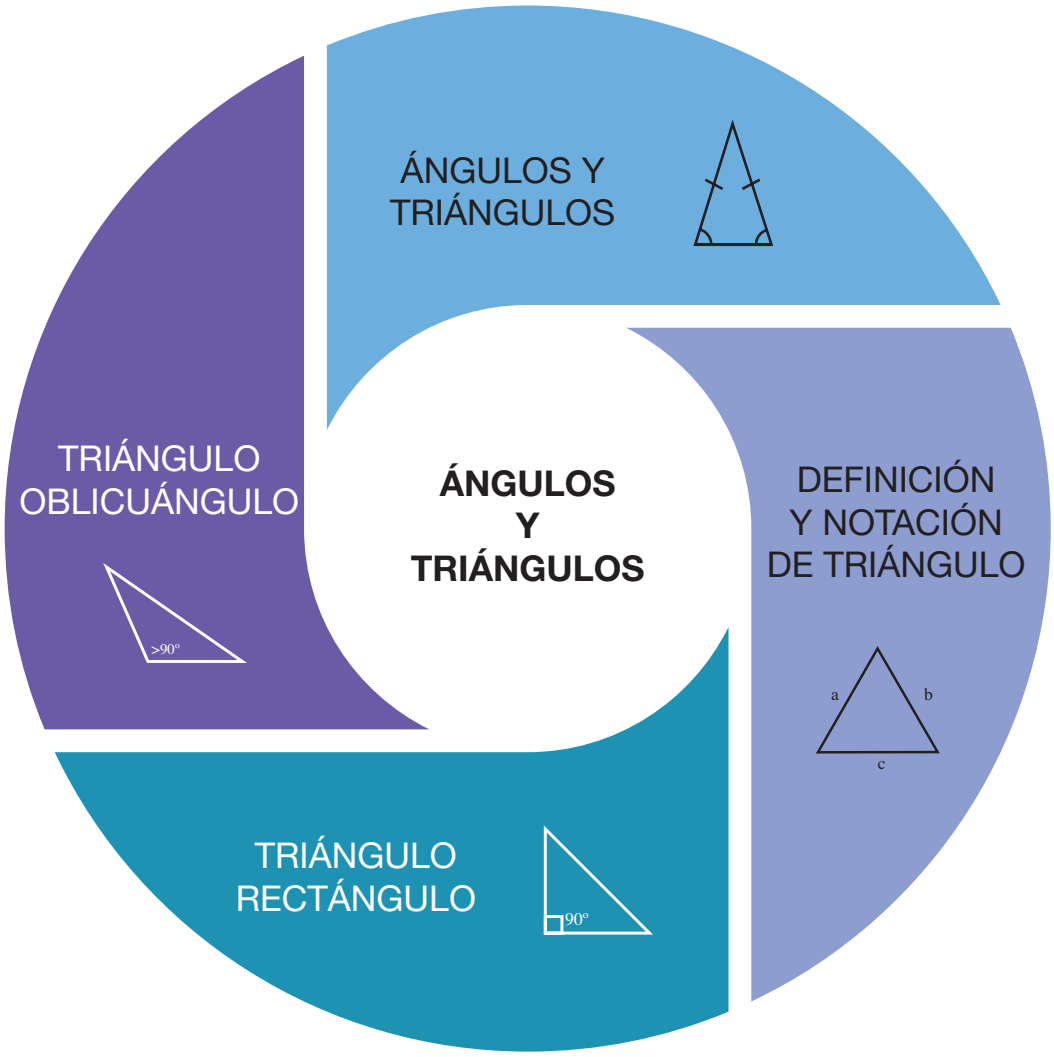
Respuestas a las actividades:

1.1 A= 157.5 cm^2
1.2 A= 63 cm^2
1.3 A= 15 cm^2
1.4 A= 72 cm^2
1. b) A = 432 cm^2; d) A = 96 cm^2; e) A = 135 cm^2; f) A = 25.40 m^2 g) A = 44 m^2
2. a) 13 cm b) 13 dm c) 15 cm^2 d) 32 cm^2
3. Núm. de losetas: 300
4. Precio: 1,513.61 pesos
5. A_A=49 dm^2 A_B=168 dm^2 A_C= 70 dm^2 A_D= 120 dm^2
6. 240 árboles
7. a. Diagonal mayor 30 cm y diagonal menor 7 cm
   b. 105 cm^2
   c. Que el área del rombo es la mitad del área del rectángulo
8. $ 192,217.50 MN
9. a) 100 m^2 b) 3.33 m
10. a) A_f = 450 cm^2 b) A_t= 3600 cm^2
11. Lado: 32 cm; Área: 1024 cm^2
12. A= 68 cm^2
15. Sobran: Juan: 50.04 cm^2 Mario: 16.72 cm^2

Módulo 2

Ángulos y triángulos

Diagrama de contenidos



M2
Basado en competencias

Propósito

Analiza los ángulos y triángulos para poder identificarlos y relacionarlos con su entorno, a la vez que resuelve situaciones problema.

Competencias

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.
3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Competencias genéricas y atributos

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

Introducción

Los cálculos trigonométricos recibieron un gran empuje gracias al matemático escocés John Napier, quien inventó los logaritmos a principios del siglo XVII. También encontró reglas mnemotécnicas para resolver triángulos esféricos, y algunas proporciones (llamadas analogías de Napier) para triángulos esféricos oblicuos.

Casi exactamente medio siglo después de la publicación de los logaritmos de Napier, Isaac Newton inventó el cálculo diferencial e integral. Uno de los fundamentos de su trabajo fue la representación de muchas funciones matemáticas utilizando series infinitas de potencias de la variable x. Newton encontró la serie para el sen x y series similares para el cos x y la tan x. Con la invención del cálculo, las funciones trigonométricas fueron incorporadas al análisis; todavía hoy desempeñan un importante papel tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

Por último, en el siglo XVIII, el matemático suizo Leonhard Euler definió las funciones trigonométricas utilizando expresiones con exponenciales de números complejos. Esto convirtió a la Trigonometría en sólo una de las muchas aplicaciones de los números complejos; además, Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

El propósito de este módulo es desarrollar en el alumno las habilidades, destrezas y actitudes para conocer y emplear los diferentes elementos de la Trigonometría Plana en la resolución de situaciones de la vida cotidiana.

Los contenidos de aprendizaje que se abordan son: elementos geométricos básicos como punto, recta, plano, semirrecta; así como los elementos de la circunferencia y el círculo (centro, radio, diámetro, cuerda, arco, longitud de arco, ángulo central, ángulo inscrito, recta tangente, recta secante y sector circular); sistemas de medición de ángulos sexagesimal y cíclico. Igualmente, se estudian los diferentes tipos de ángulos de acuerdo con su medida, sentido y posición respecto a dos rectas paralelas cortadas por una recta secante. Además, trazo de las rectas y puntos notables de un triángulo, mediatriz, bisectriz, mediana, altura, circuncentro, incentro, baricentro y ortocentro, y la identificación de la semejanza y proporción entre triángulos.

Historia de la Trigonometría

La Trigonometría es la rama de las Matemáticas que estudia las relaciones entre los lados y los ángulos de los triángulos. Los babilonios y los egipcios (hace más de 3 mil años) fueron los primeros en utilizar los ángulos de un triángulo y las razones trigonométricas para efectuar medidas en agricultura y la construcción de pirámides. También se desarrolló a partir de los primeros esfuerzos hechos para avanzar en el estudio de la Astronomía mediante la predicción de las rutas y posiciones de los cuerpos celestes y para mejorar la exactitud en la navegación, así como en el cálculo del tiempo y los calendarios.

El estudio de la Trigonometría pasó después a Grecia, en donde destaca el matemático y astrónomo griego Hiparco, por haber sido uno de los principales desarrolladores de esta rama. Las tablas de "cuerdas" que construyó fueron las precursoras de las tablas de las funciones trigonométricas de actuales.

Desde Grecia, la Trigonometría pasó a la India y Arabia, donde era utilizada en la Astronomía. Y desde Arabia se difundió por Europa, donde finalmente se separa de la Astronomía para convertirse en una rama independiente, parte de las Matemáticas.

M2

Basado en competencias

La historia de la trigonometría comienza con los babilonios y los egipcios. Estos últimos establecieron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos. Sin embargo, en los tiempos de la Grecia clásica, en el siglo II a.C., el astrónomo Hiparco de Nicea construyó una tabla de cuerdas para resolver triángulos. Comenzó con un ángulo de 71° y llegó hasta 180° con incrementos de 71°; la tabla daba la longitud de la cuerda delimitada por los lados del ángulo central, dado que corta a una circunferencia de radio r. No se sabe el valor que Hiparco utilizó para r. Trescientos años después, el astrónomo Tolomeo utilizó $r = 60$, pues los griegos adoptaron el sistema numérico (base 60) de los babilonios.

Pirámide de Guiza
Fuente: shutterstock

¿Quién era Pitágoras?

Filósofo y matemático griego nacido en la Isla de Samos, actual Grecia, h. 572 a.C.-Metaponto, hoy desaparecida, actual Italia, h. 497 a.C. Se tienen pocas noticias de la biografía de Pitágoras que puedan considerarse fidedignas, ya que su condición de fundador de una secta religiosa propició la temprana aparición de una tradición legendaria en torno a su persona.

El pitagorismo fue un estilo de vida inspirado en un ideal ascético y basado en la comunidad de bienes, cuyo principal objetivo era la purificación ritual (catársis) de sus miembros a través del cultivo de un saber en el que la música y las matemáticas desempeñaban un papel importante. El camino de ese saber era la filosofía, término que, según la tradición, Pitágoras fue el primero en emplear en su sentido literal de "amor a la sabiduría".

También se atribuye a Pitágoras haber transformado las Matemáticas en una enseñanza liberal mediante la formulación abstracta de sus resultados, con independencia del contexto material en que ya eran conocidos algunos de ellos; éste es, en especial, el caso del famoso teorema que lleva su nombre y que establece la relación entre los lados de un triángulo rectángulo, una relación de cuyo uso práctico existen testimonios procedentes de otras civilizaciones anteriores a la griega.

Pitágoras
Fuente: shutterstock

Teorema de Pitágoras
Fuente: shutterstock

¿Quién era Arquímedes?

Nace en Siracusa (Sicilia), dos generaciones después de Euclídes (287–212 a.C.). Muchas de sus vivencias han llegado hasta nuestros días, al igual que muchos de sus trabajos matemáticos.

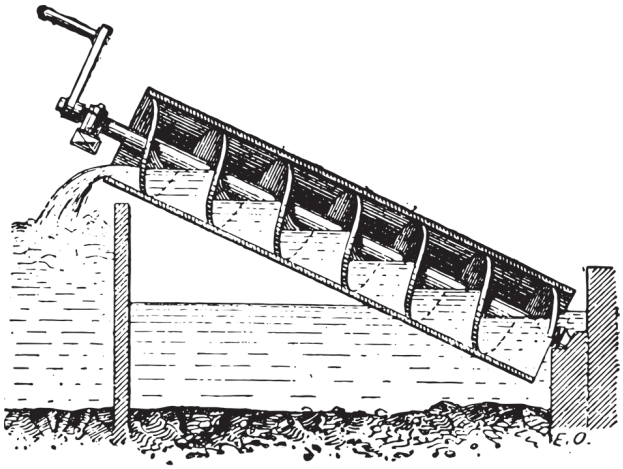
Pasó tiempo en Egipto, donde estudió, en la gran Biblioteca de Alejandría, las enseñanzas de Euclides. Durante esta estancia en el valle del Nilo, inventó el llamado "Tornillo de Arquímedes",

un artefacto capaz de elevar agua desde un nivel bajo a otro más alto. Este invento es usado en la actualidad.

Pasó el resto de sus días en Siracusa. Permaneció en contacto con los sabios alejandrinos y, gracias a la correspondencia que mantenía con ellos, han llegado hasta nuestros días numerosos escritos.

Entre sus inventos más destacados encontramos la palanca, la polea (simple y compuesta), las catapultas y numerosos elementos destinados a la defensa.

Arquímedes
Fuente: shutterstock



Tornillo de Arquímedes
Fuente: shutterstock

¿Quién era Tolomeo?

Fue un astrónomo y matemático (c. 100-c. 170), que dominó el pensamiento científico hasta el siglo XVI por sus teorías y explicaciones astronómicas. Posiblemente nació en Grecia, pero su verdadero nombre, Claudius Ptolemaeus, dice lo que realmente se sabe de él: 'Ptolemaeus' indica que vivía en Egipto y 'Claudius' que era ciudadano romano.

Contribuyó a las matemáticas con sus estudios en trigonometría y aplicó sus teorías a la construcción de astrolabios y relojes de sol.

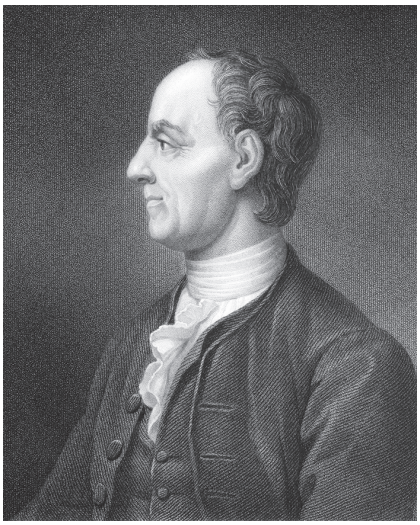
Claudio Tolomeo
Fuente: shutterstock

Reloj de sol
Fuente: shutterstock

¿Quién era Euler?

Fue un matemático suizo (1707-1783), sus trabajos se centraron en el campo de las matemáticas puras. Nació en Basilea y se licenció a los 16 años. En 1727 fue miembro del profesorado de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Fue nombrado catedrático de física en 1730, y de matemáticas en 1733. En 1741 fue profesor de matemáticas en la Academia de Ciencias de Berlín. Euler regresó a San Petersburgo en 1766, donde permaneció hasta su muerte. Aunque tuvo una pérdida parcial de visión antes de cumplir 30 años y una ceguera casi total al final de su vida, produjo obras matemáticas importantes, como reseñas matemáticas y científicas.

En su *Introducción al análisis de los infinitos* (1748), trató la trigonometría y la geometría analítica. Entre sus obras se encuentran *Instituciones del cálculo diferencial* (1755), *Instituciones del cálculo integral* (1768-1770) e *Introducción al álgebra* (1770).



Leonhard Euler
Fuente: shutterstock

¿Quién era John Napier?

Fue un matemático escocés nacido en Merchiston (1550-1617), cerca de Edimburgo. Estudió en la Universidad de San Andrés y allí fue seguidor del movimiento de la Reforma en Escocia, después de unos años tomó parte en los asuntos políticos de los protestantes y es autor de la primera interpretación importante en Escocia de la Biblia.

Principalmente es conocido por introducir el primer sistema de logaritmos (1614). Además, fue uno de los primeros, si no el primero, en utilizar la moderna notación decimal para expresar fracciones decimales de una forma sistemática.

John Napier
Fuente: shutterstock

La palabra trigonometría se deriva de dos raíces griegas: *trigon*, triángulo, y *metra,* medida, entonces, se tiende a creer su aplicación sólo se limita o refiere a las varias relaciones entre los ángulos de un triángulo y sus lados. Sin embargo, se ha empleado para calcular áreas, distancias, trayectorias y en el estudio de la mecánica, etc., con base en la resolución de triángulos.

La trigonometría al principio aparece como parte de la geometría, que se ocupa de formular relaciones entre las medidas angulares y las longitudes de los lados de un triángulo; surgió para resolver inicialmente problemas de exactitud en la navegación y en el cálculo del tiempo y los calendarios por parte de los griegos, posteriormente en cálculos astronómicos. Por ejemplo, la solución del llamado triángulo astronómico se utiliza para encontrar la latitud y longitud de un punto, la hora del día, la posición de una estrella y otras magnitudes.

Entonces se dividió en dos ramas fundamentales: la trigonometría plana, que se ocupa de figuras contenidas en un plano, y la trigonometría esférica, que se usa sobre todo en navegación y astronomía, y estudia triángulos esféricos, es decir, triángulos que forman parte de la superficie de una esfera.

1. Ángulos y triángulos

Euclides define un ángulo como la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta. Según Proclus, un ángulo debe ser una calidad, una cantidad o una relación. El primer concepto fue utilizado por Eudemus, quien lo describió como desviación de una línea recta; el segundo, por Carpus de Antioch, que lo vio como el intervalo o el espacio entre las líneas que se intersectaban. Euclides adoptó un tercer concepto, aunque sus definiciones de ángulos rectos, agudos y obtusos son cuantitativas.

Existen básicamente dos formas de definir un ángulo en el plano:

1. **Geométrica:** se denomina ángulo a la amplitud entre dos líneas de cualquier tipo que concurren en un punto común llamado vértice. Coloquialmente, ángulo es la figura formada por dos líneas con origen común. El ángulo entre dos curvas es el que forman sus rectas tangentes en el punto de intersección.

2. **Trigonométrica:** es la amplitud de rotación o giro que describe un segmento rectilíneo en torno a uno de sus extremos, tomado como vértice, desde una posición inicial hasta una final. Si la rotación es en sentido levógiro (contrario a las manecillas del reloj), el ángulo se considera positivo. Si la rotación es en sentido dextrógiro (conforme a las manecillas del reloj), se considera negativo.

1.1. Sistemas de medición de ángulos

Las unidades utilizadas para la medida de los ángulos son:

- Radián (usado oficialmente en el Sistema Internacional de Unidades)
- Grado centesimal
- Grado sexagesimal

1.2. Clasificación de ángulos

Con base en su amplitud:

- Agudo: formado por dos semirrectas con amplitud mayor de 0 rad y menor de $\pi/2$ rad. Es decir, mayor de 0° y menor de 90° (grados sexagesimales), o menor de 100g (grados centesimales).
- Recto: de amplitud igual a $\pi/2$ rad. Es equivalente a 90° sexagesimales (o 100g centesimales).
- Obtuso: aquél cuya amplitud es mayor a $\pi/2$ rad y menor a π rad. Mayor a 90° y menor a 180° sexagesimales (o más de 100g y menos de 200g centesimales).
- Entrante: aquél cuya amplitud es mayor a π rad y menor a 2π rad. Mayor a 180° y menor a 360° sexagesimales (o más de 200g y menos de 400g centesimales).

También existen:

- Congruentes: aquellos que tienen la misma amplitud.
- Complementarios: aquellos cuya suma de medidas es $\pi/2$ radianes o 90°.
- Suplementarios: aquellos cuya suma de medidas es π radianes o 180°.
- Conjugados: aquellos cuyas medidas suman 2π radianes o 360°.

En función de su posición, se denominan:

- Adyacentes: tienen un vértice y un lado común, pero no tienen ningún punto interior común.
- Consecutivos: tienen un lado y el vértice común.
- Opuestos por el vértice: sus lados son semirrectas opuestas.

Actividad:

Actividad
Módulo 2

Dinamización mediante pregunta detonadora y lluvia de ideas: ¿Qué es un ángulo? ¿Cómo se llaman los ángulos por su amplitud? ¿Cómo se llaman los ángulos respecto a su posición?

Trabajo en equipo: identifica la respuesta correcta a las preguntas siguientes y localízalas en el crucigrama.

1. Par de ángulos que suma 360°	2. Ángulo que mide más de 0° y menos de 90°
3. Ángulo que mide más de 90° y menos de 180°	4. Ángulo que se forma cuando vemos hacia arriba
5. Ángulo que mide 0°	6. Ángulo que se forma cuando vemos hacia abajo
7. Ángulo que mide 180°	8. Ángulos que tienen la misma amplitud
9. Ángulo que mide 360°	10. Ángulo que tiene el mismo lado inicial y el mismo lado terminal, y comparten el mismo vértice
11. Ángulo que mide 90°	12. Par de ángulos que suman 90°

C	C	E	L	E	V	A	C	I	O	N	F	Ñ	P	W
O	O	E	T	A	C	D	S	T	O	L	T	A	O	Q
N	N	M	F	M	W	Q	R	L	L	P	E	I	L	J
T	G	S	P	E	C	K	U	S	U	A	A	R	C	Z
I	U	D	L	L	A	N	O	R	B	Q	W	K	B	Y
O	G	E	O	M	E	Q	B	A	I	X	Y	N	E	A
P	A	K	I	Q	S	M	C	Ñ	B	M	J	S	J	U
R	D	S	D	L	G	K	E	S	E	G	S	W	V	L
M	O	R	E	J	E	L	P	N	T	E	D	S	C	X
S	S	O	P	Q	H	Y	O	B	T	U	S	O	R	A
A	R	T	R	T	Z	Ñ	R	N	I	A	G	A	E	R
B	C	A	E	Y	J	H	E	R	I	G	R	F	C	P
Z	A	N	S	P	U	U	R	L	E	U	T	I	T	E
T	L	I	I	Q	R	M	D	A	S	D	U	T	O	W
O	L	I	O	G	P	E	R	I	G	O	N	A	L	S
T	D	K	N	W	T	O	S	B	U	R	O	C	R	I
W	C	O	T	E	R	M	I	N	A	L	E	S	A	B
Y	C	I	M	N	J	R	P	D	G	I	N	L	K	L

Conclusión: el alumno reconoce la importancia de lo realizado.

¿Sabías que? Módulo 2

El número "1" se llama uno, el "2" se llama dos y así sucesivamente debido al número de ángulos que tiene:

- **El 1 tiene un ángulo.**
- **El 2 tiene dos ángulos.**
- **El 3 tiene tres ángulos.**
- **Y el 0 cero no tiene ángulos.**

Fuente: www.verasoul.com/2009/sabias-que.htm

1.3. Sistemas de medición

1.3.1. Unidades angulares y relación entre grados sexagesimales y radianes

M2 Basado en competencias

Sistema sexagesimal: en este sistema se divide la circunferencia (una vuelta) en 360 ángulos centrales iguales, sumando en total 360°; cada una de estas partes corresponde a un grado, es decir 1/360°. El grado es la unidad fundamental y se denomina sexagesimal porque su base es 60.

1° = representación de un grado.
1´ = representa un minuto.
1´´ = representa un segundo.

1° = 60´ 1´ = 60´´

Sistema cíclico: en este sistema la unidad fundamental es el radián, definido como la medida de un ángulo central que subtiende un arco con la misma longitud del radio de la circunferencia.

Se sabe que:	Despejando al grado, se tiene:	Ahora despejando al radián, se tiene:
π radiantes = 180 grados	$1° = \frac{\pi}{180} rad$	$1\, rad = \frac{180}{\pi}$ grados

Actividad Módulo 2

Actividad:

Completa la tabla con base en el conocimiento adquirido.

Sistema sexagesimal (grados)	Sistema cíclico (radianes)
	2π rad
270°	
180°	
	π/2 rad
45°	
2°	
57.29°	1 rad

Actividad:

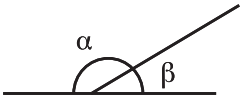
Actividad
Módulo 2

Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno:

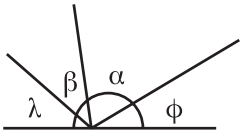
1. Dibuja el ángulo dado y determina el valor de su ángulo complementario
   $\beta = 35°$
   $\alpha = 25°$
   $\Omega = 37° \; 15''$
   $\mu = 18°$
   $\theta = 52° \; 35''$

2. Dibuja el ángulo dado y determina el valor de su ángulo suplementario
   $\beta = 115°$
   $\alpha = 97°$
   $\Omega = 127° \; 35''$
   $\psi = 148°$
   $\theta = 172° \; 25''$

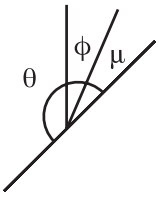
3. Calcula el valor de la magnitud de cada ángulo que se indica para cada figura



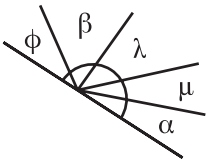
$\alpha = 4x$, $\beta = 2x$



$\lambda = 3x$, $\beta = 2x$, $\alpha = 4x$, $\phi = x$



$si \; \phi = \frac{1}{4}\theta, \mu = \frac{1}{3}\theta$



$si \; \phi = \frac{2}{5}x, \beta = \frac{2}{3}x, \lambda = \frac{1}{5}x, \mu = \frac{4}{3}x, \alpha = \frac{3}{6}x$

1.4. Congruencia (≅)

Dos figuras son congruentes cuando tienen la misma forma y el mismo tamaño.

La palabra congruente se deriva de las raíces latinas *con,* que significa "con" y *gruente,* "concordar". Las figuras congruentes pueden hacerse coincidir parte por parte: las coincidentes se llaman "correspondientes".

El símbolo de congruencia es (≅), combinación de dos (=), que significan: tener el mismo tamaño o medida, y (~), que implica tener el misma forma. La congruencia establece igual forma y medida.

Postulados de congruencia para segmentos:

- Dos segmentos son congruentes si y sólo si tienen la misma forma y la misma medida.
- Todo segmento es congruente a sí mismo.
- Si un primer segmento es congruente con un segundo segmento y el segundo es congruente con un tercero, entonces el primero es congruente con el tercero.

Postulados de congruencia para ángulos:

- Dos ángulos son congruentes si y sólo si tienen la misma forma y la misma medida.
- Todo ángulo es congruente a sí mismo.
- Si un primer ángulo es congruente con un segundo ángulo, y el segundo es congruente con un tercero, entonces el primero es congruente con el tercero.

Postulados de congruencia para triángulos:

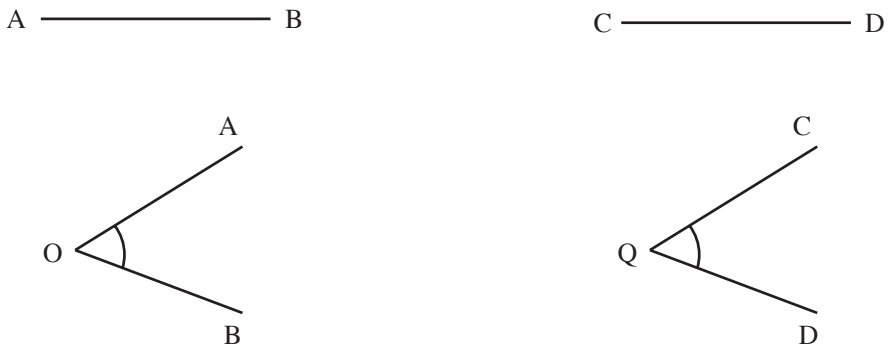
- Dos triángulos son congruentes si tres pares de lados y tres pares de ángulos son congruentes.
- Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes son congruentes (LLL).
- Dos triángulos son congruentes sí dos lados y el ángulo comprendido entre esos lados de un primer triángulo son congruentes con dos lados y el ángulo comprendido de un segundo triángulo (LAL).

Dos triángulos son congruentes si dos ángulos y el lado comprendido entre los dos ángulos de un primer triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado entre ellos de un segundo triángulo (ALA).

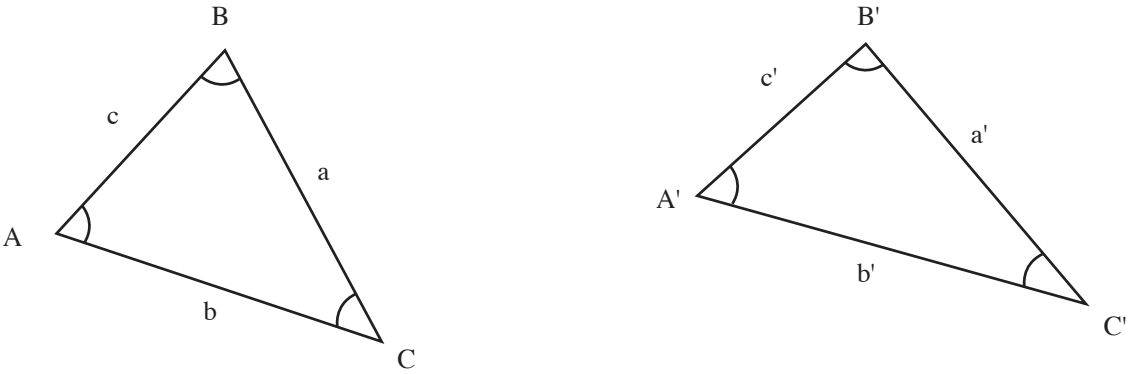
Actividad
Módulo 2

Actividad:

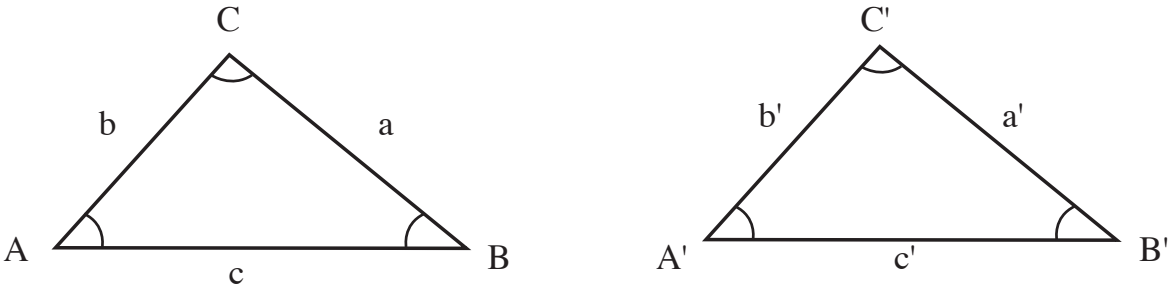
Con base en los postulados verificar si los siguientes casos son congruentes o no y explica tu respuesta.



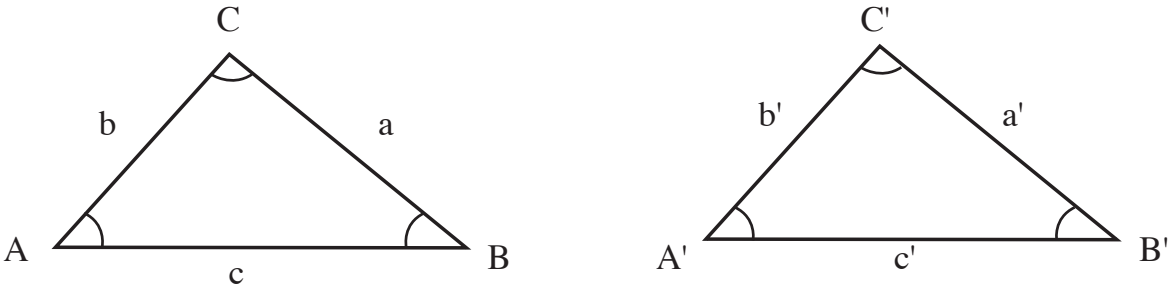
LAL (lado,ángulo, lado)



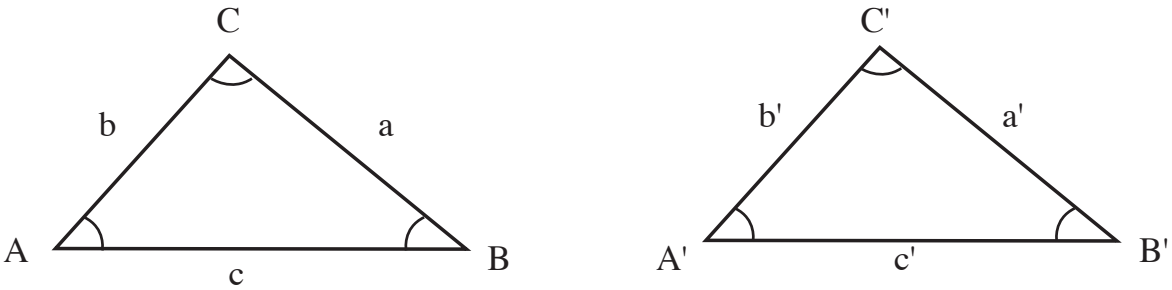
LAL (lado,ángulo, lado)



LLL (lado, lado, lado)



ALA (ángulo, lado, ángulo)



2. Definición y notación de triángulo

Se define como una porción del plano, limitado por tres rectas, que se intersectan en tres puntos (vértices) desalineados.

Los elementos de un triángulo son: tres vértices, tres lados, tres ángulos interiores y tres exteriores.

Para identificar los vértices se utilizan letras mayúsculas, para los lados, letras minúsculas; los ángulos se identifican con letras del alfabeto griego.

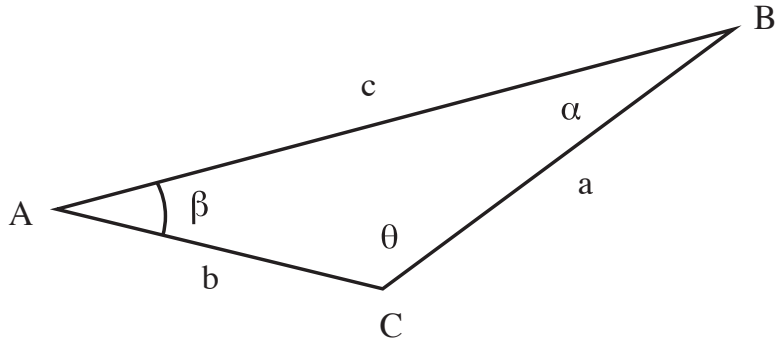


Figura 1. Triángulo

2.1. Clasificación de triángulos

2.1.1. Por las longitudes de sus lados

Triángulo equilátero: si sus tres lados tienen la misma longitud y los tres ángulos internos miden 60 grados o radianes.

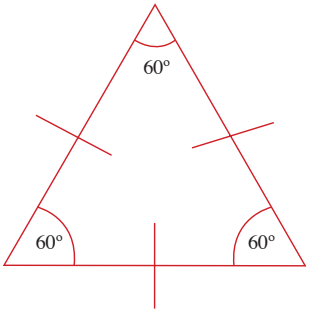


Figura 2. Triángulo equilátero

Triángulo isósceles: si tiene dos lados iguales con la misma medida los ángulos que se oponen a estos lados tienen la misma magnitud.

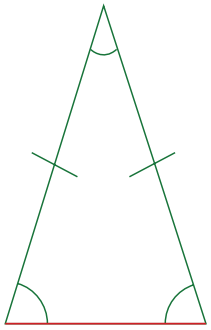


Figura 3. Triángulo isósceles

Triángulo escaleno: si todos sus lados tienen longitudes diferentes, y la magnitud de los ángulos es diferente.

Figura 4. Triángulo escaleno

2.1.2. Por la amplitud de sus ángulos

Triángulo rectángulo: si tiene un ángulo interior de 90°.

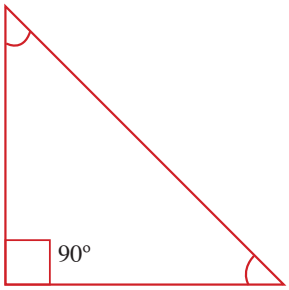


Figura 5. Triángulo rectángulo

Triángulo oblicuángulo: cuando ninguno de sus ángulos interiores son rectos (90°). Por ello los triángulos obtusángulos y acutángulos son oblicuángulos.

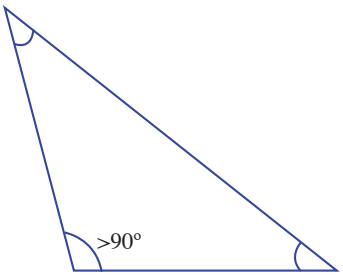


Figura 6. Triángulo oblicuángulo

Triángulo obtusángulo: si uno de sus ángulos interiores es obtuso (mayor de 90°), los otros dos son agudos (menores de 90°).

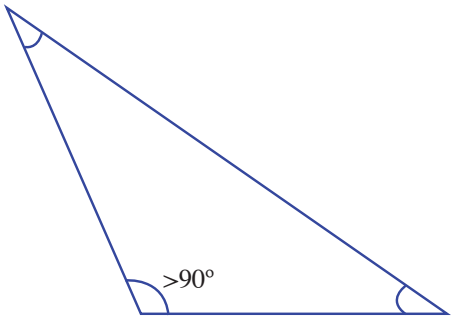


Figura 7. Triángulo obtusángulo

Muchos pintores destacados basaban sus obras de arte en triángulos, para que sus pinturas manifestaran la sensación que pretendían reflejar. Por ejemplo, en "Acróbata y joven equilibrista", de Picasso, la composición resulta de dos triángulos rectángulos, lo que provoca una sensación de estabilidad y seguridad, el otro invertido provoca la sensación inversa.

¿Sabías que? Módulo 2

Triángulo acutángulo: cuando sus tres ángulos interiores son menores de 90°. El triángulo equilátero es un caso particular de triángulo acutángulo.

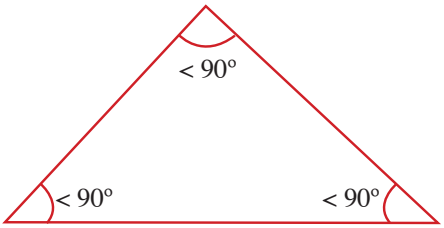
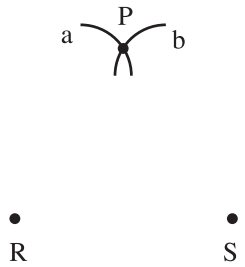


Figura 7. Triángulo acutángulo

2.2. Rectas y puntos notables de un triángulo

2.2.1. Localizar un punto equidistante de dos puntos dados

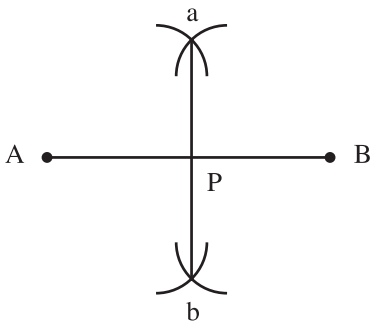
Dados los puntos R y S



- Utilizando regla y compás.
- Con R como centro y radio mayor que la mitad de $\overline{RS}$ construir el arco "a".
- Con centro en S, construir el arco "b".

2.2.2. Punto medio de un segmento

- Localizar los puntos a y b equidistantes de A y B.
- El segmento que une los puntos a y b intersecta al segmento AB en P (punto medio de AB).



2.2.3. Bisectar un ángulo

- Con S como centro y cualquier radio conveniente, construir el arco $\overline{mn}$.
- Localizar el punto P, equidistante de m y n.

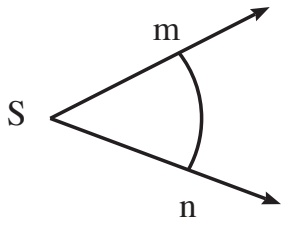
M2 Basado en competencias

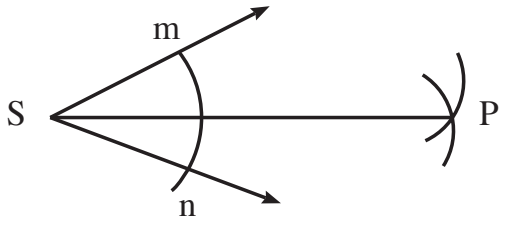
¿Sabías que? Módulo 2

A los triángulos también se les llama trígonos, aunque es un nombre menos común para estos polígonos

Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A1ngulo

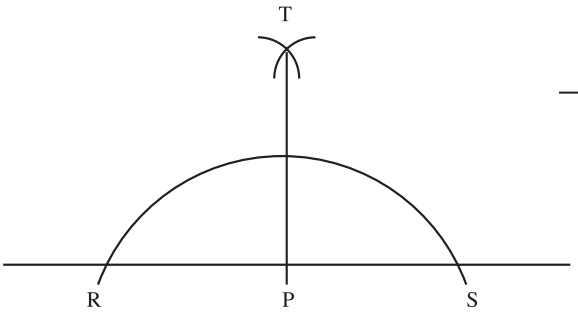
- Trazar el segmento $\overline{SP}$, que corresponde a la bisectriz.



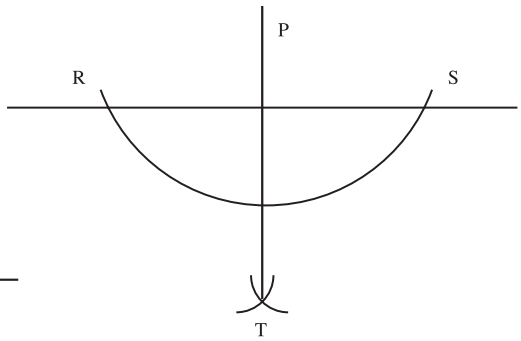


2.2.4. Por un punto P, trazar una perpendicular a una recta dada

d_1) P está sobre la recta



d_2) P está fuera de la recta



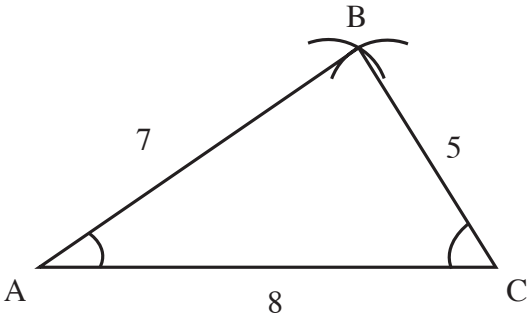
- Con P como centro y con un radio conveniente, construir un arco que intersecte a la recta en R y S.
- Localizar el punto T equidistante de R y S.
- Trazar el segmento $\overline{PT}$.

Ejemplo:
En un triángulo cuyas medidas sean 8, 7 y 5 cm, trace la circunferencia inscrita sobre éste.

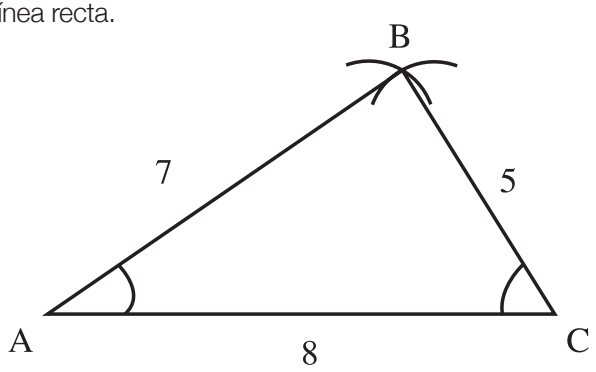
¿Cómo se utiliza la regla, el compás y las escuadras para el trazo de figuras geométricas?

¿Conoces el concepto de mediatriz, mediana, bisectriz, altura, ortocentro, baricentro, incentro y circuncentro?

- Traza el triángulo ABC de base ocho, esto es AC = 8, AB = 7 y CB = 5.



- Con el compás, haciendo centro en el vértice C, a una abertura cualquiera, marcamos en los lados CA y CB los puntos de corte indicados por D y E, respectivamente; con esa misma abertura del compás hacemos centro en el punto D para trazar el arco que se cruzará con el arco trazado desde el punto E, el punto de cruce se unirá con el vértice inicial C mediante una línea recta.

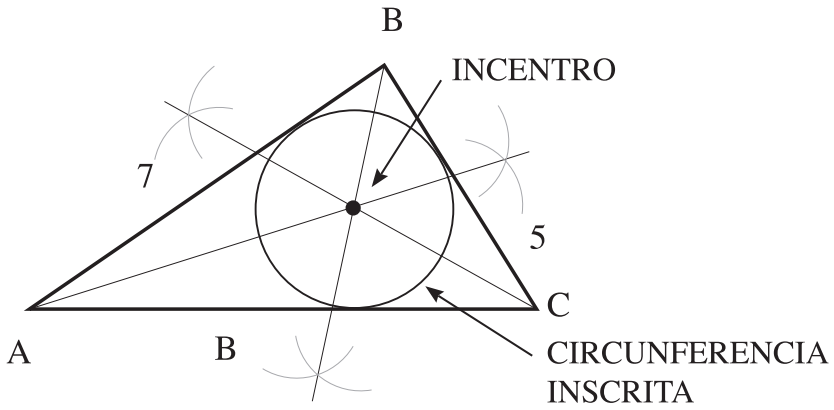


A la línea recta trazada en el paso anterior se le conoce como **bisectriz** y es la que divide el ángulo en dos partes iguales.

De igual forma se traza la segunda y tercera bisectriz, a partir de los vértices A y B.

- Al cruce de las bisectrices se le conoce como **incentro**.
- Con el compás, haciendo centro en el incentro se traza la circunferencia inscrita en el triángulo.

Conclusión: el estudiante reconocerá la importancia de lo realizado en esta actividad.



Basado en competencias

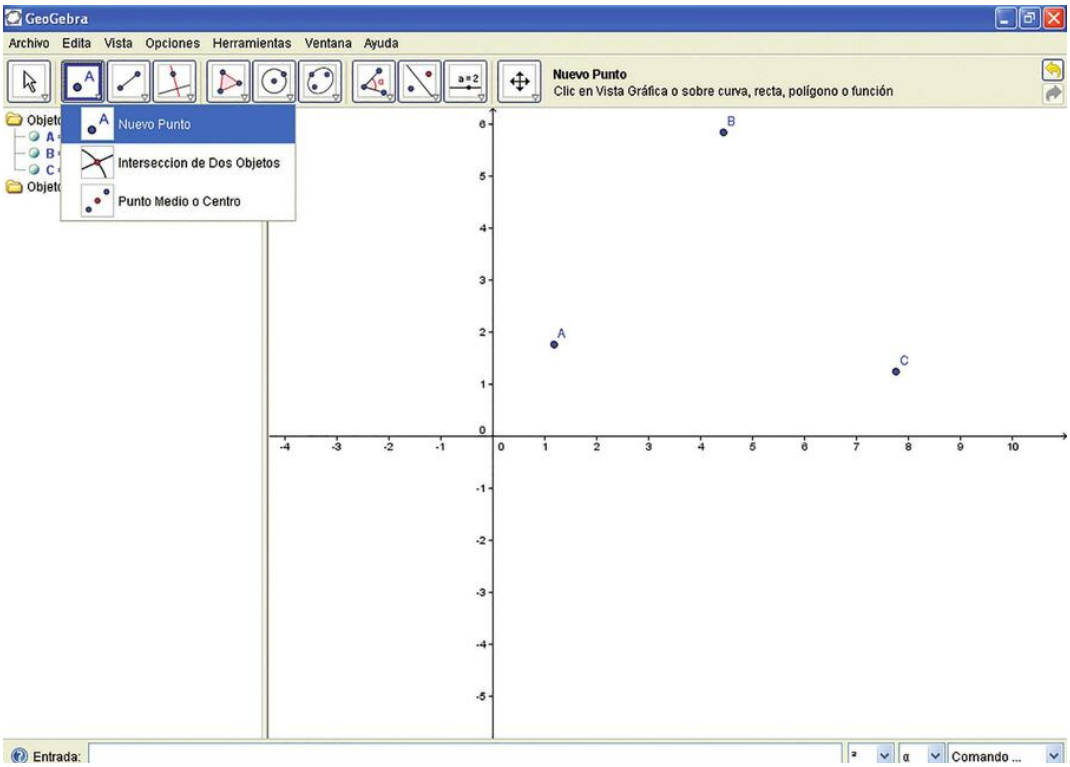
Actividad
Módulo 2

Actividad:

1. En tu cuaderno, traza la circunferencia inscrita al triángulo, con las medidas siguientes: 9, 7, y 5 cm, respectivamente.

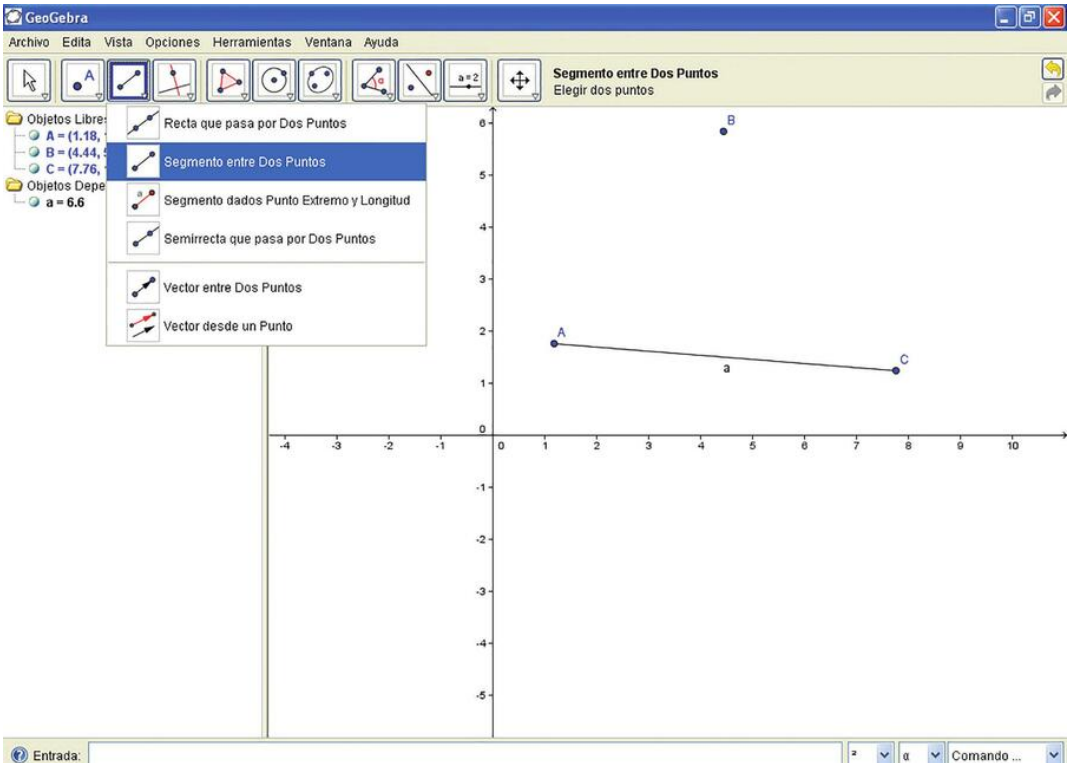
2. **Realiza la construcción geométrica en Geogebra;** este programa informático nos permite realizar, de manera fácil, trazos de curvas de muchos tipos.

   1. Inicia Geogebra.
   2. En la ventana de trabajo, selecciona "Poner 2 puntos". Puedes ubicarlos sobre cualquiera de los ejes para una fácil referencia



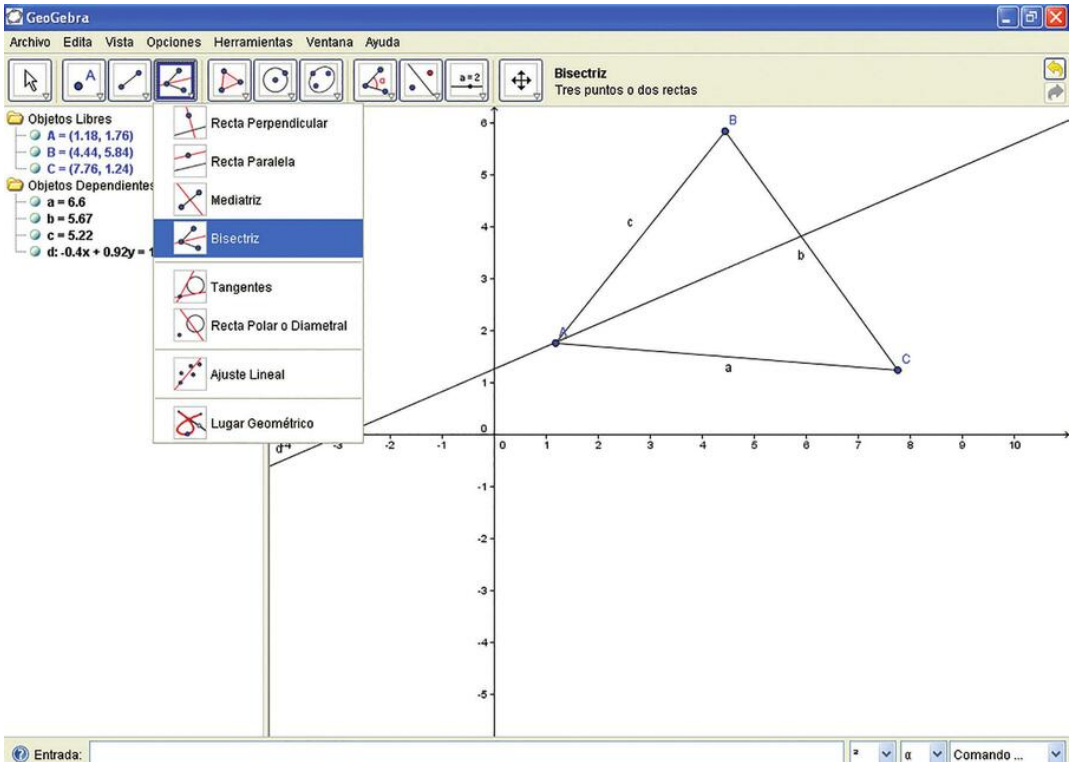
Fuente: Geogebra, 2016.

3. Selecciona "Segmento entre 2 puntos" de la barra de herramientas, elige 2 de los puntos que ya haz trazado, únelos.
4. Repite este proceso para todos los puntos.



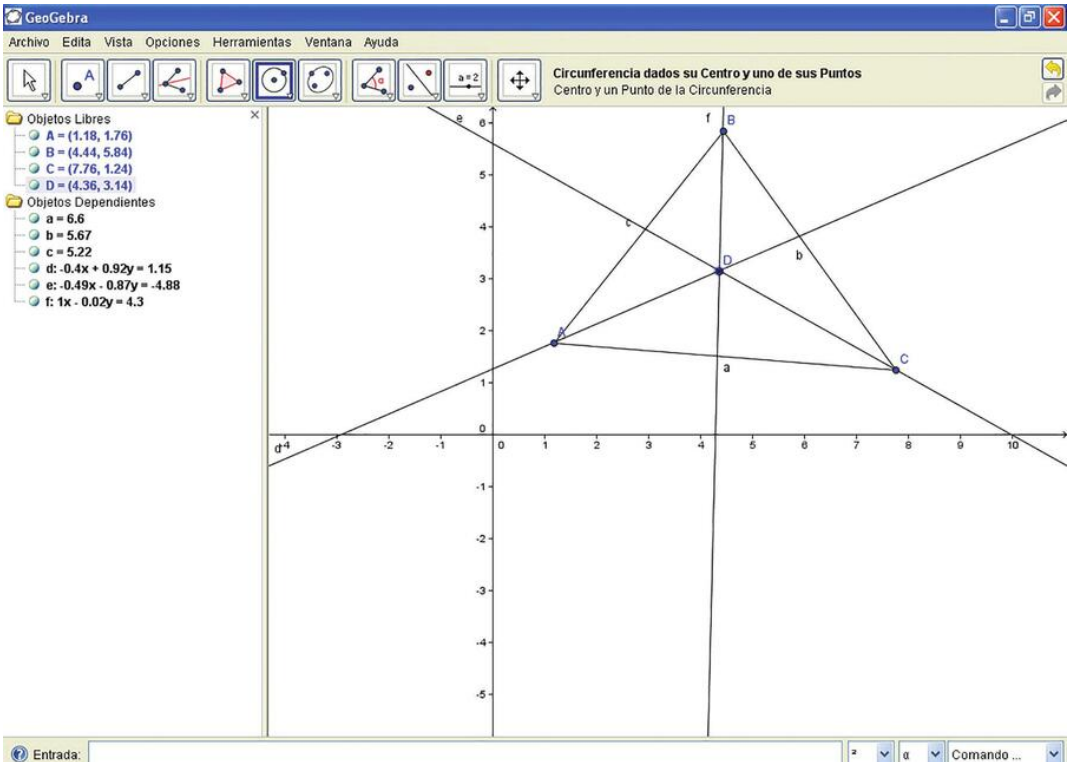
Fuente: Geogebra, 2016.

5. Una vez trazado el triángulo, selecciona la opción "Bisectriz": elige los vértices en el siguiente orden: A, B y C. Se trazará automáticamente la bisectriz.



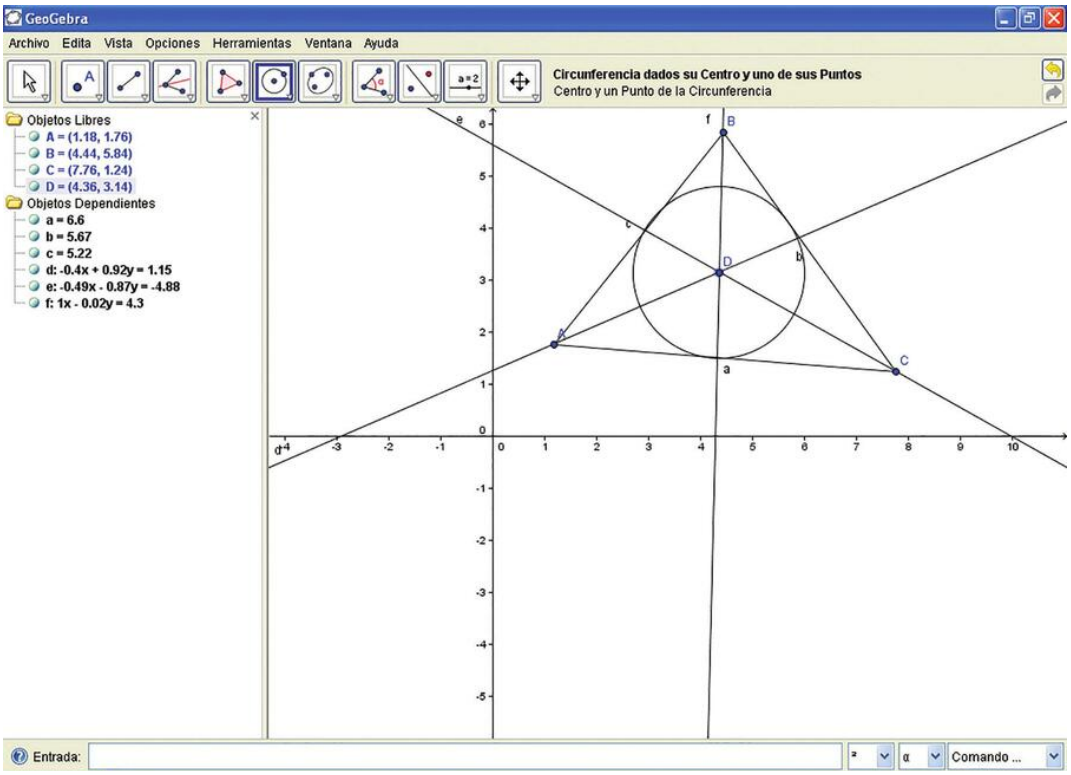
Fuente: Geogebra, 2016.

6. Repite lo anterior con los demás vértices, procura que el vértice del ángulo al cual se le trazará la bisectriz sea siempre el segundo punto elegido.
7. En la barra de herramientas presiona el botón "Circunferencia" dado su centro y uno de sus puntos. El centro es la intersección de las bisectrices del paso anterior.



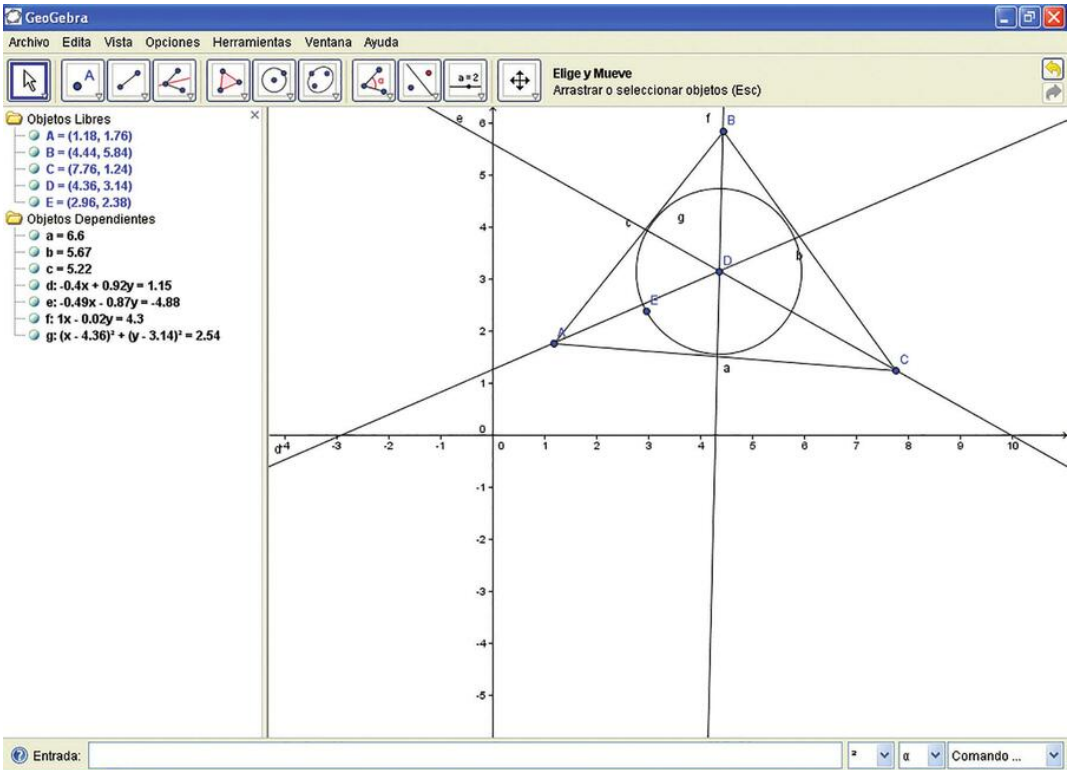
Fuente: Geogebra, 2016.

8. El otro punto debe coincidir con cualquiera de los lados del triángulo. Arrastra el cursor hasta que toque el lado y suelta. Se trazará automáticamente la circunferencia inscrita.



Fuente: Geogebra, 2016.

Conclusión: en Geogebra se comprobarán los trazos anteriores.



Fuente: Geogebra, 2016.

Actividad
Módulo 2

Actividad:

En tu cuaderno traza la circunferencia circunscrita al triángulo con medidas de 8, 7, y 5 cm, utilizando en Geogebra.

2.3. Semejanza

Una semejanza en general existe cuando puede cambiar el tamaño y la orientación entre las figuras geométricas, pero no altera su forma.

2.3.1. Semejanza de triángulos

Postulados de semejanza:

- Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales (AAA).

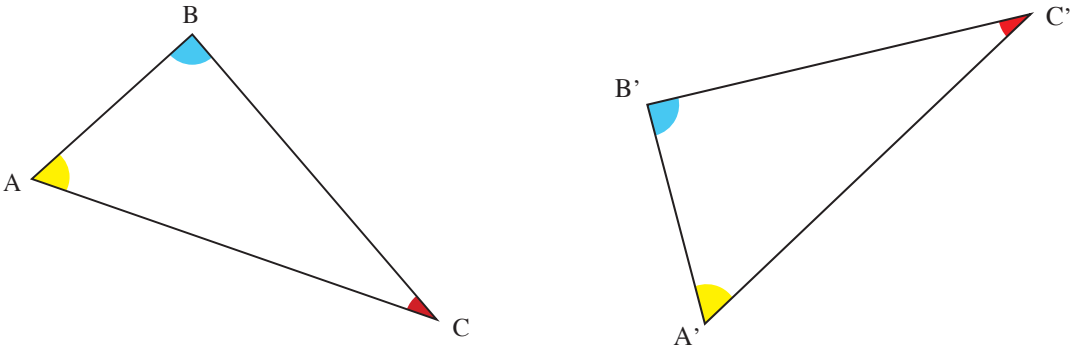


Figura 9. AAA

Los ángulos correspondientes son $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$

- Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo congruente comprendido entre dos lados proporcionales (LAL).

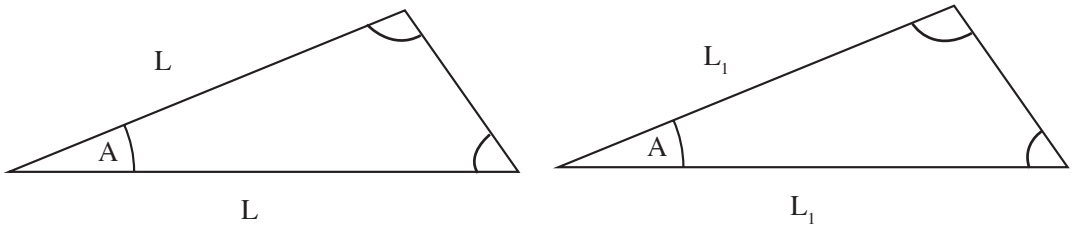


Figura 10. LAL

- Dos triángulos son semejantes, si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales (LLL).

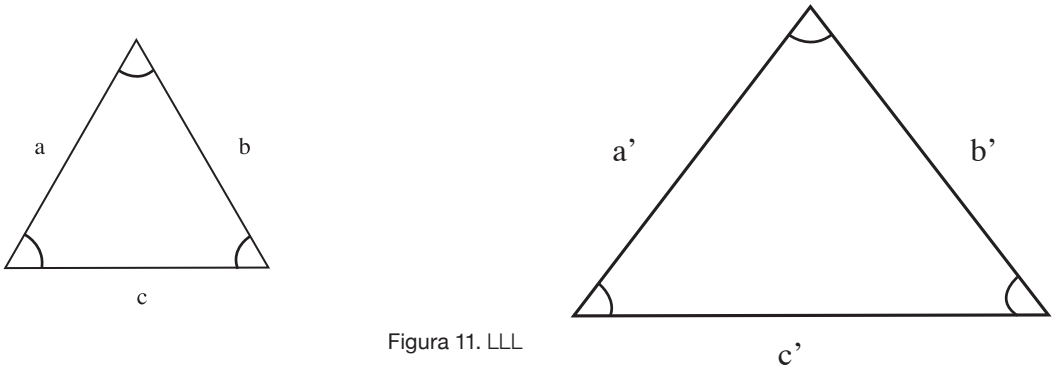


Figura 11. LLL

Para denotar que dos triángulos ABC y DEF son semejantes, se escribe ABC ~ DEF, el orden indica la correspondencia entre los ángulos: A, B y C se corresponden con D, E y F, respectivamente.

Actividad:

Trabajo en equipo a realizar en las áreas deportivas, patios de recreo.

En la escuela hay estructuras metálicas para sostener el tablero de básquetbol, en las cuales se aprecian diferentes tipos de triángulos. Con base en los postulados de semejanza, obtén tres triángulos semejantes e indica la medida de los ángulos y lados, respectivamente.

Estructura Metálica
Fuente: shutterstock

¿Sabes trazar triángulos semejantes aplicando una razón y proporción?

¿Qué es la medición de ángulos?

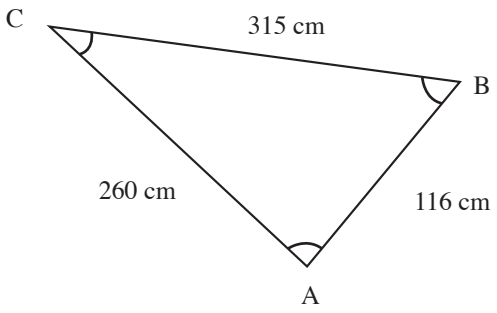
El teodolito es un instrumento que sirve para medir ángulos horizontales y verticales y es muy usado en topografía. Consta de un anteojo que gira alrededor de un eje vertical. De esta forma se miden dos tipos de ángulos: la orientación y la elevación

Fuente: http://www.centros5.pntic.mec.es

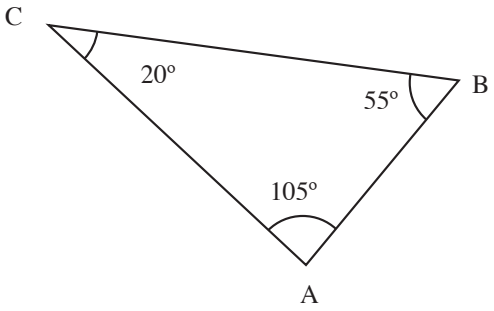
¿Sabías que? Módulo 2

Considerando el triángulo mayor y el vértice C que corresponde con el tablero:

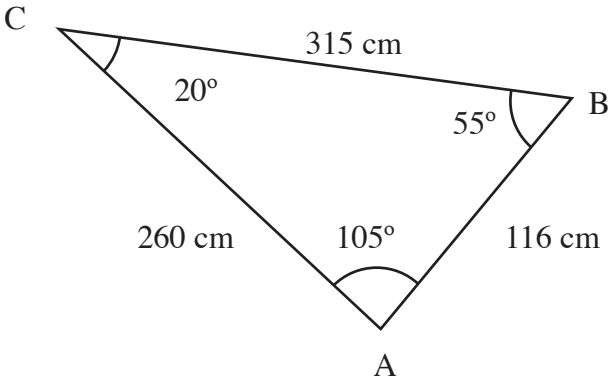
Mide los lados del triángulo ABC.



Mide con transportador los ángulos interiores.



Localiza en la estructura metálica del tablero un segundo triángulo semejante al triángulo ABC.



Basado en competencias

Conclusión

Ahora completa la tabla siguiente, con base en los dos triángulos semejantes que localizaste en la estructura.

Medida del lado	Valor del ángulo	Razones	Proporciones
$\overline{CA} = 260cm$	$\angle A = 105º$	$\frac{AB}{DE} = \frac{116}{116}$	
$\overline{AB} = 116cm$	$\angle B = 55º$		$\frac{CB}{FE} = \frac{CA}{FD}$
$\overline{CB} = 315cm$	$\angle C = 20º$		

Por último, localiza un tercer triángulo semejante

Mide los lados del triángulo ABC	
Mide con transportador los ángulos interiores	

Completa la tabla siguiente:

Medida (lado)	Valor del ángulo	Razones	Proporciones

Conclusión

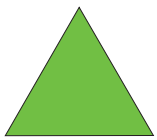
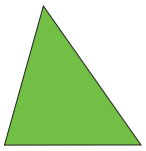
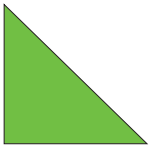
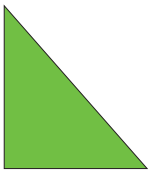
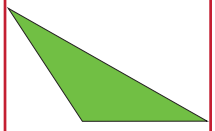
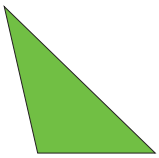
Actividad:

Actividad
Módulo 2

¿Sabes la clasificación de los triángulos?

Con una cámara digital o con tu celular toma imágenes de objetos, por ejemplo, un mueble, una vela, un anuncio con formas triangulares, de cada una de las clasificaciones que aparecen en la tabla que se presenta a continuación.

Dibuja una tabla como ésta en tu cuaderno y pega o dibuja las imágenes que encontraste

Triángulo	Equilátero	Imagen	Isósceles	Imagen	Escaleno	Imagen
Acutángulo						
Rectángulo						
Obtusángulo						

Conclusión: el alumno obtendrá sus propias conclusiones de la actividad realizada.

3. Triángulo rectángulo

Es el triángulo que tiene un ángulo interno recto (90°); los lados que conforman al ángulo recto se llaman catetos y los del lado opuesto se conocen como hipotenusa.

3.1. Teorema de Pitágoras

El Teorema de Pitágoras señala que el cuadrado de la hipotenusa, en los triángulos rectángulos, es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

A
Actividad
Módulo 2

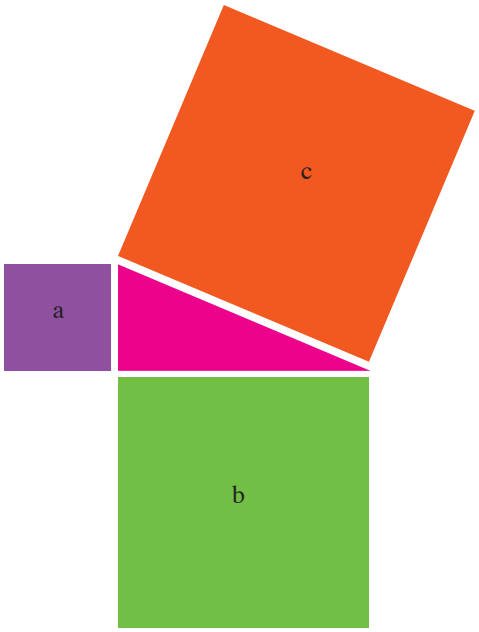
Actividad:

Material: hojas de fomi de colores, tijeras, juego geométrico, lápices y cuaderno.

Mediante la siguiente actividad comprobarás el Teorema de Pitágoras.

1. Traza un triángulo rectángulo de 4 cm de base y 3 cm de altura
2. Traza los tres cuadrados que se forman. El primero con la medida de la base, el segundo con la medida de la altura y el tercero con la medida de la hipotenusa.
3. Recorta todas las figuras.
4. Calcula el área de los tres cuadrados.
5. ¿Cuánto suman las áreas de los cuadrados formados por la base y la altura?.
6. Compara el resultado anterior con el valor del área del cuadrado formado por la hipotenusa.
7. “La suma de los cuadrados de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa”, esto es: $c^2 = a^2 + b^2$

M2
Basado en competencias

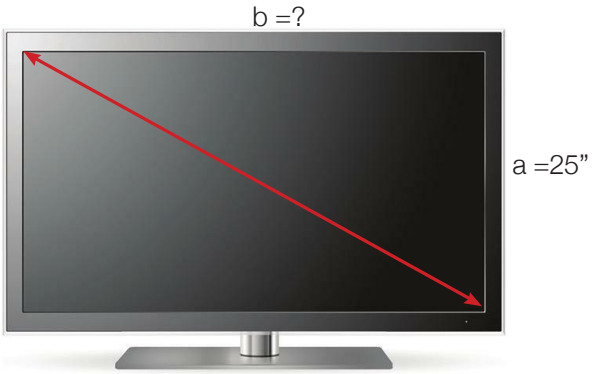


Conclusión

Actividad:

Actividad
Módulo 2

Juan quiere empotrar en la pared una pantalla LCD de 40 pulgadas. Para ello necesita determinar la dimensión del largo; sabe que la altura es de 25 pulgadas. El tamaño de una pantalla se determina por la medida de la diagonal.

Imagen	Modelo
	

Imágenes
Fuente: shutterstock

Datos: la diagonal de la pantalla está representada por c = 40”; lo alto, por a = 25” y el largo, por b =?

Utilizando el Teorema de Pitágoras:	
Sustituimos valores:	
Despejamos la variable b:	
Realizando operaciones:	
Simplificamos:	
El largo de la pantalla es:	

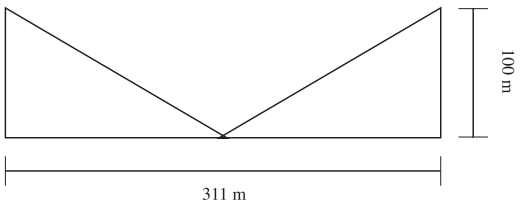
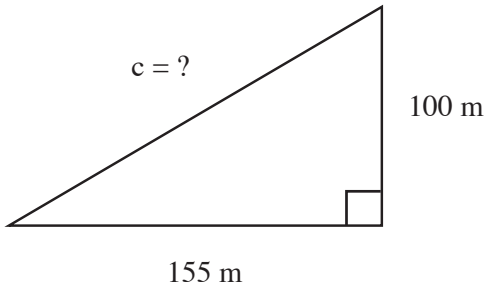
Conclusión: las dimensiones que Juan deberá tener en cuenta para instalar la pantalla son:

A
Actividad
Módulo 2

Actividad:

El puente del viaducto de Millau, en Aveyron (Francia), es el más alto del mundo, alcanza una altura de 343 m sobre el río Tarn, tiene una longitud total de 2.460 m y cuenta con 11 claros de 311 m entre los pilares. Para reparar uno de los 162 tirantes, un empleado del puente debe subir a lo más alto del pilar, cuya altura es de 100 m sobre la carretera.

¿Qué longitud tiene el tirante más largo del puente que va a reparar?

Modelo	
	

Utilizando el Teorema de Pitágoras calculamos la longitud del cable más largo, representado por la variable c:	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Sustituyendo valores:	
Realizando operaciones:	
Simplificando:	
La longitud del tirante es:	

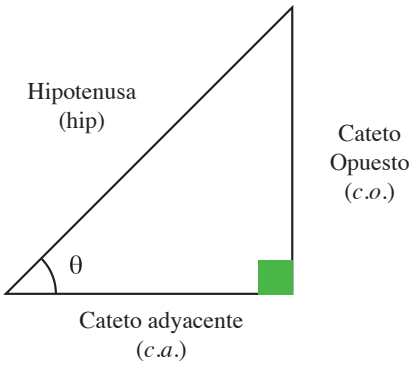
M2
Basado en competencias

Conclusión

3.2. Razones trigonométricas

Desde antes de nuestra era, el hombre se entesó por la relación entre la longitud de un objeto vertical y la de la respectiva sombra que proyectaba, similarmente se denomina a la razón entre la longitud de la sombra y la que la genera. Como ejemplo podemos observar la sombra que proyecta un poste de luz, una antena, un árbol, un asta bandera, un edificio, etc., y para resolver estas situaciones se utilizan las razones trigonométricas.

Considerando el siguiente triángulo rectángulo, las razones trigonométricas son:



$$sen\,\theta = \frac{hip}{c.a} \qquad csc\,\theta = \frac{hip}{c.o.}$$

$$cos\,\theta = \frac{c.a.}{hip} \qquad sec\,\theta = \frac{hip}{c.o.}$$

$$tan\,\theta = \frac{c.o.}{c.a.} \qquad cot\,\theta = \frac{c.a.}{c.o.}$$

Actividad:

Actividad
Módulo 2

Karen desea determinar el ángulo de inclinación, respecto al piso, de una rampa para personas con capacidades diferentes, se sabe que la altura mide 18 cm y la diagonal 85 cm.

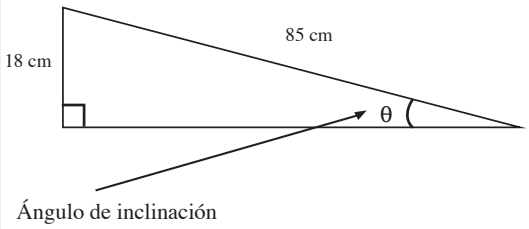
Imagen	Modelo
	

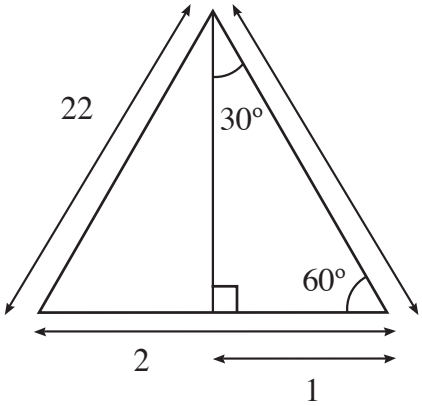
Imagen
Fuente: shutterstock

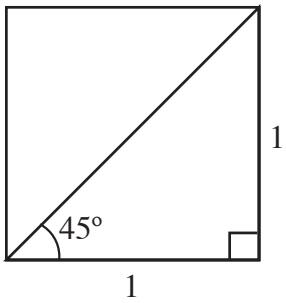
Utilizando la razón trigonométrica seno:	$Sen\,\theta = \frac{c.o.}{hip}$
Sustituimos los valores y simplificamos:	
Efectuando operaciones	
Despejamos θ :	
El valor del ángulo es:	

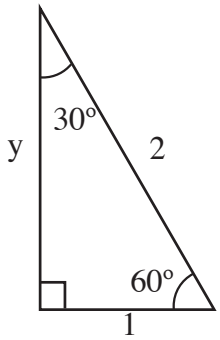
Conclusión

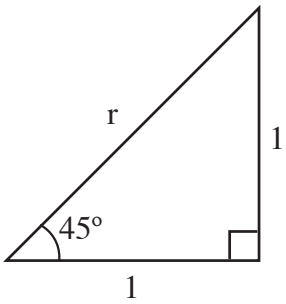
3.3. Valores exactos de las razones trigonométricas

Con base en los valores de las figuras, completa la tabla que se presenta en la 67:









$$y = \sqrt{(2)^2 - (1)^2}$$

$$y = \sqrt{4 - 1}$$

$$y = \sqrt{3}$$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$$

$$r = \sqrt{1 + 1}$$

$$r = \sqrt{2}$$

Ejemplo

$$sen\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$cos\ 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$tan\ 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$$

Razón	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
seno		1/2					
coseno							
tangente			1				
cotangente							
secante							
cosecante							

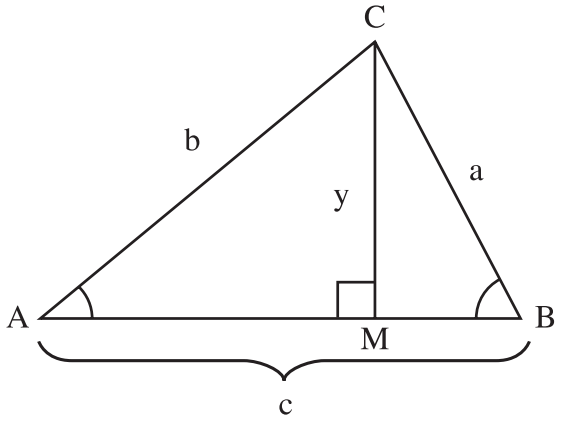
4. Triángulo oblicuángulo

Es aquél en el que ninguno de sus ángulos internos es recto. En nuestro caso utilizaremos la Ley de senos y de cosenos; también existe la Ley de tangentes.

4.1. Ley de senos

Es una relación de tres igualdades que siempre se cumplen entre los lados y ángulos de un triángulo cualquiera.

Considerando el triángulo siguiente:



Entonces:

En el triángulo AMC aplicamos el seno de A: $sen\ \mathrm{A} = \frac{y}{b}$

Despejado y, se tiene: $y = b\ sen\ A$

En triángulo BMC aplicamos el seno de B: $sen\ \mathrm{B} = \frac{y}{a}$

Despejado y, se tiene: $y = a\ sen\ B$

Ahora Igualando ambas expresiones: $b\ sen\ A = a\ sen\ B$

Por lo tanto: $\frac{b}{senB} = \frac{a}{senA}$

Por último, la ley de senos se escribe como: $\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$

Conclusión: la Ley del seno establece que la razón entre la longitud de cada lado y el seno del ángulo opuesto a él, es constante.

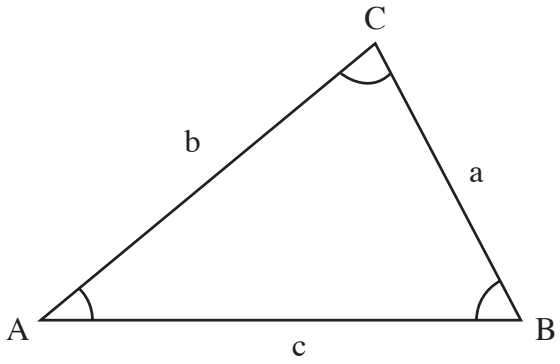
4.2. Ley de cosenos

En cualquier triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos dos lados, multiplicado por el coseno del ángulo comprendido entre dichos lados.

La Ley de cosenos se considera como una extensión del Teorema de Pitágoras, aplicable a todos los triángulos.

La **Ley de los cosenos** es utilizada para encontrar los valores faltantes de un triángulo oblicuángulo (no rectángulo), cuando las medidas de dos lados y la del ángulo incluido son conocidas (LAL), o las longitudes de los tres lados (LLL) son conocidas. En cualquiera de estos casos es imposible usar la Ley de senos.

Considerando el siguiente triángulo oblicuángulo:



La Ley de los cosenos establece:

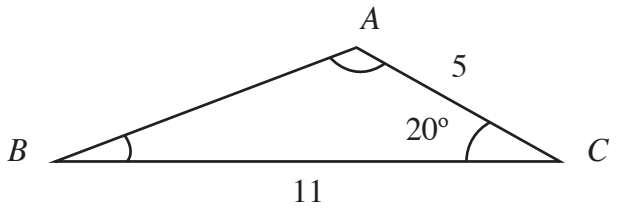
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\ A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2bc\ cos\ B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C$

Esto se parece al Teorema de Pitágoras, excepto que para el tercer término, y si C es un ángulo recto, el tercer término es igual a 0 porque el coseno de 90° es 0 y se obtiene el Teorema de Pitágoras. Así, el Teorema es un caso especial de la Ley de cosenos.

Ejemplo:

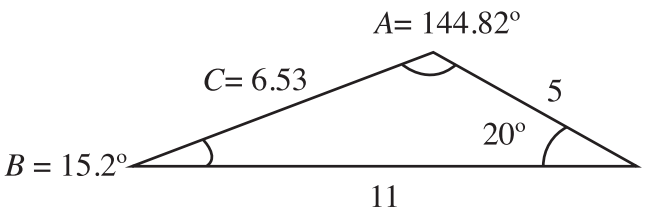
Dos lados y el ángulo incluido (LAL)

Si: $a = 11$, $b = 5$ y $C = 20^o$, calcular el lado y los ángulos restantes.



Utilizando la Ley de cosenos:	$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\ C$
Sustituimos los valores y simplificamos:	$c^2 = 11^2 + 5^2 - 2(11)(5)\ cos\ C$
Efectuando operaciones y aplicando raíz cuadrada:	$c = \sqrt{11^2 + 5^2 - 2(11)(5)\cos 20^o}$
El valor del lado c:	$c = 6.53$
Para calcular los ángulos que faltan, ahora se utiliza la Ley de senos:	$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$
Sustituimos los valores:	$\frac{11}{senA} = \frac{5}{senB} = \frac{6.53}{sen20^o}$
Primero, para calcular el valor del ángulo A se utiliza la expresión:	$\frac{11}{senA} = \frac{6.53}{sen20^o}$
Despejando A:	$A = sen^{-1}\left(\frac{11sen20^o}{6.53}\right)$
El valor del ángulo A:	$A = 144.82^o$
Después se utiliza la expresión siguiente para el ángulo B:	$\frac{5}{senB} = \frac{6.53}{sen20^o}$
Despejando B:	$B = sen^{-1}\left(\frac{5sen20^o}{6.53}\right)$
El valor del ángulo B:	$C = 15.2^o$

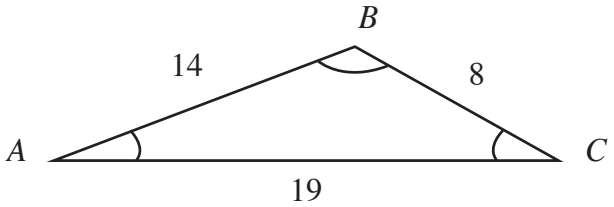
Conclusión



Ejemplo:

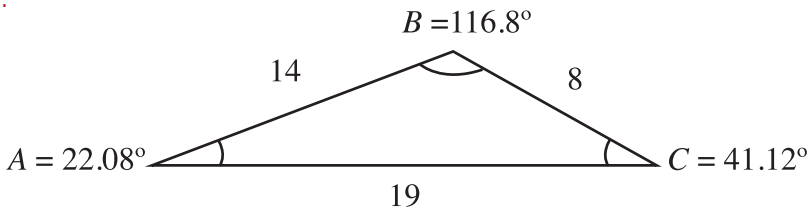
Tres lados (LLL)

Si: $a = 8$, $b = 19$ y $c = 14$, calcular los valores de los ángulos.



Es mejor calcular el ángulo opuesto al lado más grande, en este caso es del lado b:	$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cosB$
Sustituimos los valores y simplificamos:	$19^2 = 8^2 + 14^2 - 2(8)(14)\ cos\ B$
Despejando primero $cosB$:	$cosB = \frac{8^2 + 14^2 - 19^2}{2(8)(14)}$
El valor de $cosB$:	$cosB = -0.4589$
Despejando al ángulo B:	$B = cos^{-1}(-0.4589)$
El valor del ángulo B:	$B = 116.80°$
Para calcular los otros dos ángulos se utiliza la Ley de senos:	$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$
Sustituimos los valores:	$\frac{8}{senA} = \frac{19}{sen116.80°} = \frac{14}{senC}$
Primero, para calcular el valor del ángulo A se utiliza la expresión:	$\frac{8}{senA} = \frac{19}{sen116.80°}$
Despejando A:	$A = sen^{-1}\left(\frac{8sen116.80°}{19}\right)$
El valor del ángulo A:	$A = 22.08°$
Después se utiliza la expresión para el ángulo C:	$\frac{19}{sen116.80°} = \frac{14}{senC}$
Despejando C:	$C = sen^{-1}\left(\frac{14sen116.80°}{19}\right)$
El valor del ángulo C:	$C = 41.12°$

Conclusión:



Actividad:

Actividad
Módulo 2

Conocidos dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos (ALA).

Un globo aerostático es visto, al mismo tiempo, sobre un valle por dos observadoras. Las dos están a 2.32 millas de distancia una de la otra. Si las observadoras y el globo están en el mismo plano vertical y el ángulo de elevación respecto a la primera del lado izquierdo es de 28º y con respecto a la segunda es de 37º del lado derecho, ¿a qué altura se encuentra el globo?

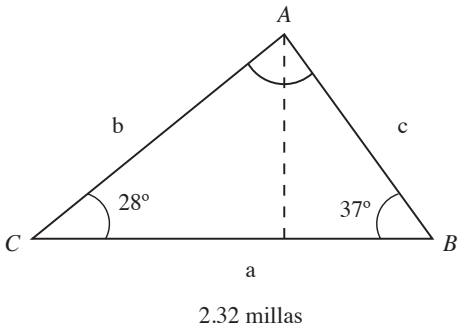
Imagen	Modelo
	

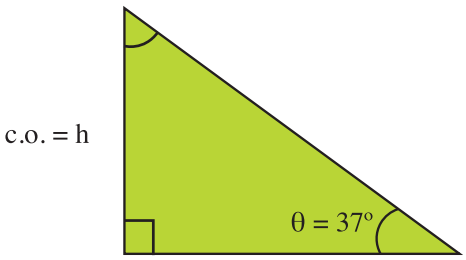
Imagen
Fuente: shutterstock

¿Conoces el triángulo rectángulo? ¿Sabes cuáles son las razones trigonométricas? ¿Conoces la Ley de senos?

Si dividimos el triángulo oblicuángulo, resultan 2 triángulos rectángulos; para resolver uno de ellos es necesario obtener la medida de un lado, que utilizaremos más adelante como hipotenusa, a través de la Ley de los senos.

Obteniendo el valor del ángulo A, por suma de ángulos interiores: A + B + C = 180°:	
Aplicando la Ley de senos:	$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$
Para resolver el triángulo del lado derecho de la imagen se utiliza:	
Se despeja la variable c:	
Se sustituyen valores:	
El valor de c es:	

Conociendo la longitud c, utilizaremos este valor como la hipotenusa del triángulo rectángulo, que se forma con la persona de la derecha y el globo.



Aplicando la razón trigonométrica seno:	$sen\theta = \frac{h}{c}$
Sustituyendo datos:	
Se despeja la altura h:	
La altura entre el globo y el suelo es:	

Conclusión

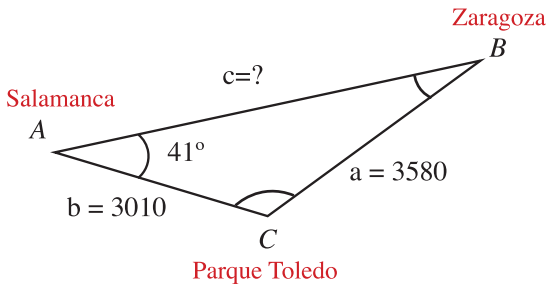
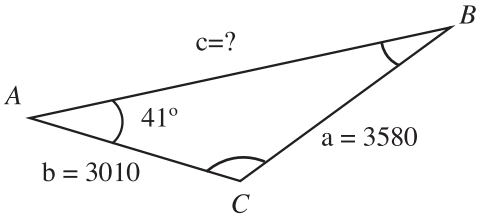
M2 Basado en competencias

Actividad
Módulo 2

Actividad:

Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Una familia española desea ir en automóvil al parque Toledo que se muestra en la figura siguiente, para esto debe seguir el trayecto $a+b+c$, si la distancia del punto A (Salamanca) al C (Toledo) es de 3010 km, y del punto C (Toledo) al B (Zaragoza) es de 3580 km, el ángulo de interno en el punto A es de 41º, ¿cuál será el recorrido total, $a+b+c$, si se trae un familiar de Zaragoza al parque de Toledo y regresar a Salamanca?

Imagen	Modelo
	

Aplicando la Ley de senos:	$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC}$
Sustitución de los tres datos conocidos:	$\frac{3580\ km}{sen41^{o}} = \frac{3010\ km}{sen\mathrm{B}}$
Despejando el ángulo B:	

Realizando operaciones, se calcula el ángulo B:	
Se calcula el valor del ángulo C:	$A + B + C = 180º$
Aplicando la ley de senos, se calcula la distancia c:	
Realizando operaciones:	
El recorrido que tiene que hacer la familia de B a C es:	
El recorrido que tiene que hacer la familia de A a B es de:	a + b + c =

Conclusión

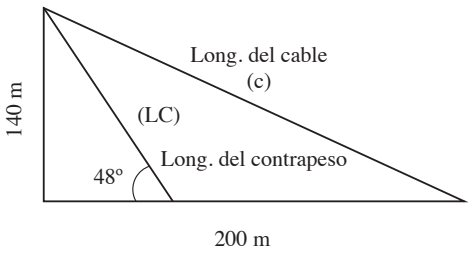
Actividad
Módulo 2

Actividad:

Se conocen dos lados y el ángulo formado entre ellos

Resuélvelo en tu cuaderno

El puente del Alamillo es atirantado, cruza el río Guadalquivir, en Sevilla, España. Consta de un único pilar que actúa de contrapeso; para los 200 m de largo del puente utiliza 13 largos cables. El contrapeso tiene una inclinación de 48º y además cuenta con un mirador que se localiza a 140 m de altura. ¿Cuál es la longitud del cable más largo?

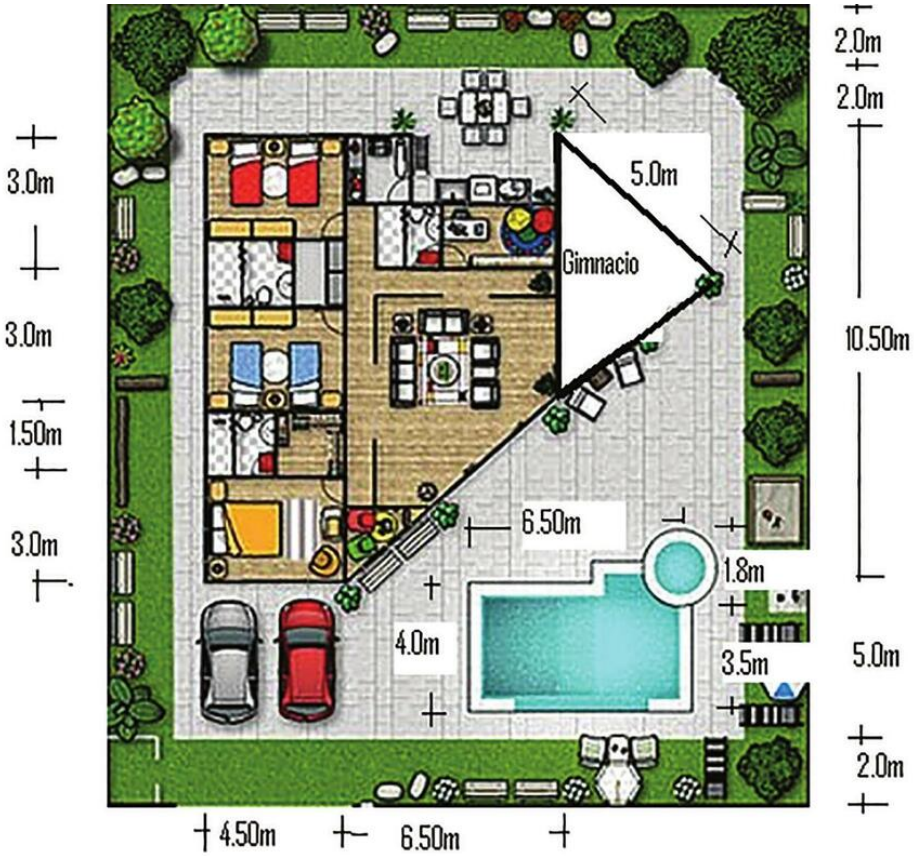
Imagen	Modelo
	

Puente del Alamillo
Fuente: shutterstock

Actividad
Módulo 2

Actividad:

Con base en el siguiente plano, calcular los m² que se indican en la tabla, así como investigar el precio de cada material. Considera que todas las medidas están en metros.



Plano arquitectónico
Fuente: elaboración propia

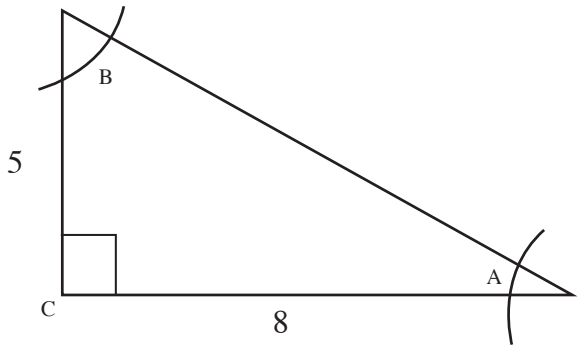
Lugar	Material	Dimensiones	Área	Precio unitario	Importe
Recámaras	Alfombra de uso rudo				
Sala comedor	Piso laminado				
Gimnasio	Tatami				
Alberca	Azulejo				
Jardín	Pasto				

Basado en competencias

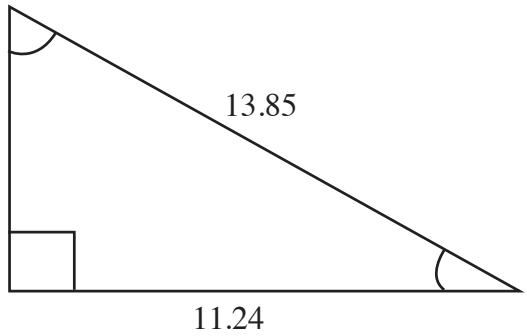
Ejercicios adicionales

Ejercicios adicionales
Módulo 2

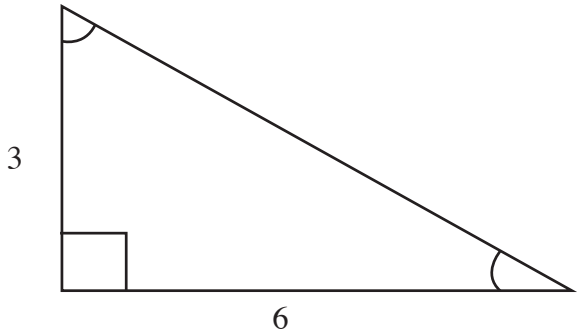
1. Escribe el valor de las seis razones trigonométricas para el siguiente triángulo:



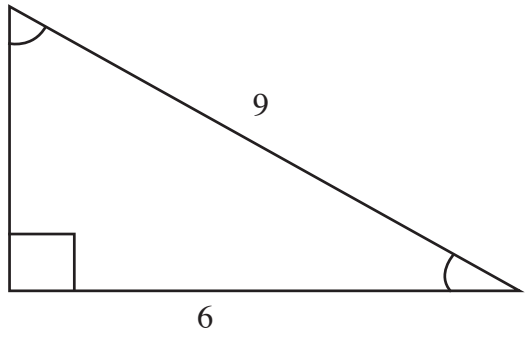
2. Escribe el valor de las seis razones trigonométricas para el siguiente triángulo:



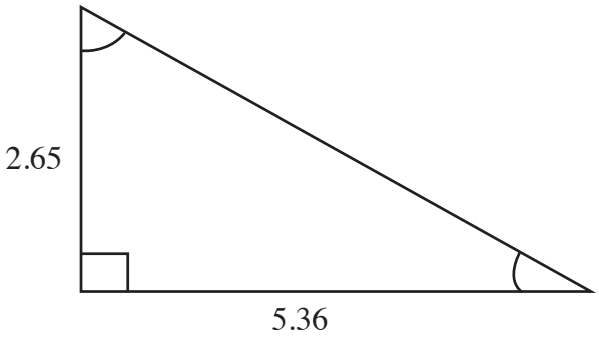
3. Calcula el valor de los tres lados y tres ángulos para el siguiente triángulo:



4. Calcula el valor de los tres lados y tres ángulos para el siguiente triángulo:



5. Escribe el valor de las seis razones trigonométricas para el siguiente triángulo:



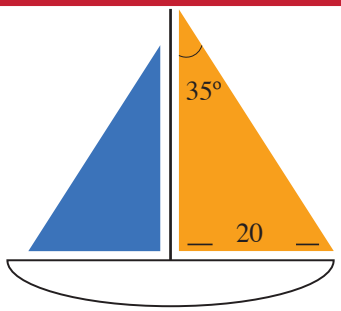
6. Si Erika mide 1.50 metros de estatura y proyecta una sombra de 1.90 metros, en ese mismo momento un anuncio de publicidad proyecta una sombra de 3.78 metros. Calcular la altura del anuncio de publicidad.

Preparatoria núm. 5, UAEM
Fuente: foto del autor

7. Si Aldo mide 1.73 metros de estatura y proyecta una sombra de 1.28 metros, en ese mismo momento el asta bandera del plantel proyecta una sombra de 6.45 metros. ¿Cuál será la altura del asta bandera?

Preparatoria núm. 5, UAEM
Fuente: foto del autor

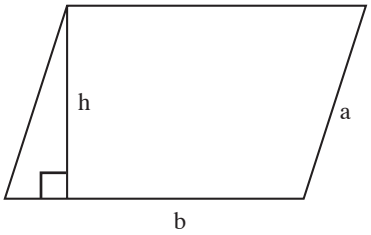
8. Luis va a construir un velero de juguete y quiere pintar las velas de diferente color, una de color azul y la otra naranja. Calcula el área que va a pintar de color naranja.

Imagen	Modelo
	

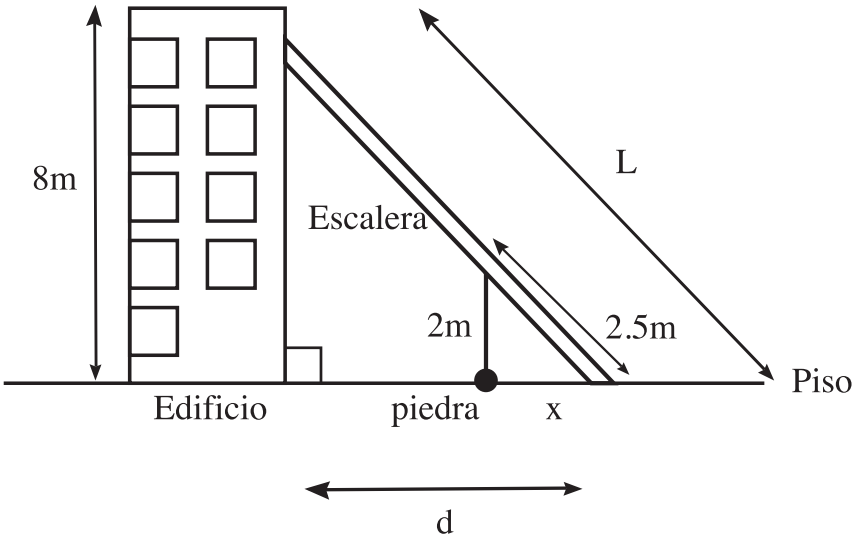
Velero
Fuente: shutterstock

9. Investiga el costo de cada pintura y, con una escuadra, mide cada figura para completar la tabla.

Calcula el costo por pintar el triángulo rojo, azul y el trapecio blanco

Figura	Fórmula para el área	Situación	Área	Costo total
	$A = \frac{bh}{2}$			
	$A = b\,h$			

10. Una escalera está recargada en un edificio a la altura de un anuncio; una piedra atada a una cuerda de 2 m de largo pende de un escalón y toca el piso. Calcula la longitud “L” de la escalera y la distancia “d” para colocar dicha escalera de acuerdo con los datos de la figura.



Basado en competencias

11. Un globo aerostático es visto por dos observadoras al mismo tiempo sobre un valle. Las dos están a 1.39 km de distancia una de la otra. Si suponemos que las observadoras y el globo están en el mismo plano vertical y el ángulo de elevación respecto a la primera es de 35º y con respecto a la segunda es de 52º, ¿a qué altura se encuentra el globo?

Globo aeroestático
Fuente: shutterstock

12. El puente del Alamillo es atirantado; cruza el río Guadalquivir, en Sevilla, España. Consta de un único pilar que actúa de contrapeso, para los 200 m de largo del puente utiliza 13 largos cables. El contrapeso tiene una inclinación de 48º y además cuenta con un mirador que se localiza a 142 m de altura.

El reto es calcular la longitud del tercer cable partiendo del contrapeso hacia el extremo del puente, toma en cuenta que la separación de los cables es simétrica.

Puente del Alamillo
Fuente: shutterstock

13. Aplicando Ley de senos, resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos con los valores dados.

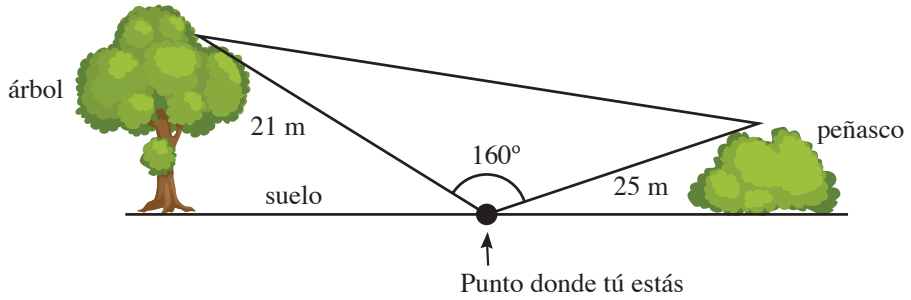
1.	$A = 46°$	$C = 72°$	$a = 12.7$	*Sol.*	B = 62°	b = 15.59 u	c = 16.79 u
2.	$A = 63°18'$	$B = 39°50'$	$a = 17.2$	*Sol.*	C = 76°52'	b = 12.33 u	c = 18.75 u
3.	$B = 118°$	$b = 14.5$ u	$a = 10.50$ u	*Sol.*	A = 22°15'17"	a = 6.22 u	C = 39°44'43"
4.	$B = 60°$	$a = 32$ u	$b = 28.9$ u	*Sol.*1	C = 46°28'46"	A = 73°31'14"	c = 24.20 u
			(calcula dos soluciones)	*Sol.*2	C = 13°31'14"	A = 106°28'46"	c = 7.80 u

14. Aplicando la Ley de cosenos, resuelve los siguientes triángulos oblicuángulos con los valores dados.

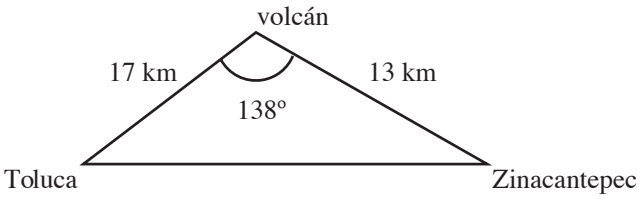
1.	$b = 12$ u	$C = 50°$	$a = 15$ u	*Sol.*	B = 51°35'38"	A = 78°24'10"	$c = 11.73$ u
2.	$c = 10$ u	$b = 6$ u	$A = 98°$	*Sol.*	B = 28°44'20"	$a = 12.36$ u	C = 53°15'40"
3.	$c = 20$ u	$B = 70°$	$a = 67$ u	*Sol.*	$b = 63.03$ u	C = 17°20'55"	A = 92°39'05"
4.	$a = 17$ u	$b = 11$ u	$c = 13$ u	*Sol.*	A = 89°47'59"	B = 40°19'11"	C = 49°52'50"

Nota: La elección de la ubicación de los lados y ángulos se le queda al alumno.

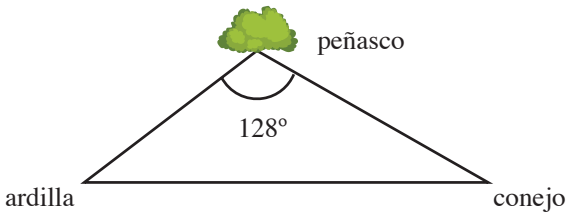
15. Desde un punto en el suelo observas la cima de dos puntos elevados: el de la izquierda es un árbol y el de la derecha es un peñasco; se presenta un ángulo de 160° donde tú estás observando ¿Cuál es la distancia que hay entre el árbol el peñasco? *Sol.* 43.31 cm



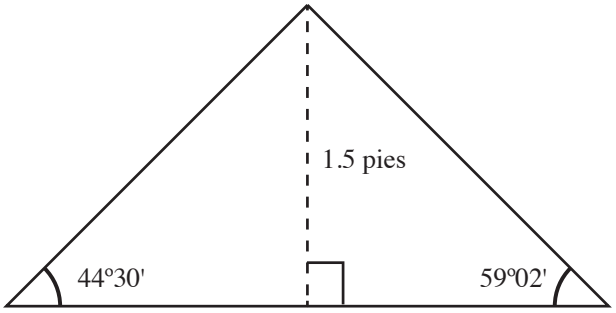
16. Desde el Nevado de Toluca se observan con un aparato de precisión dos puntos: el Palacio Municipal de Zinacantepec y el Palacio Municipal de Toluca; se presenta un ángulo de 138°en el volcán. ¿Cuál es la distancia que hay entre los dos palacios municipales? *Sol*. 28.04 km



17. Desde un peñasco un cazador observa una ardilla y un conejo a ambos lados, de 15 m y 25 m, respectivamente, desde donde él está hay un un ángulo de 128° ¿Cuál es la distancia que hay entre el conejo y la ardilla? *Sol*. 36. 22 m



18. Determina el tamaño del diámetro interior AB de una tuerca, traza un triángulo inscrito a su circunferencia interna, la altura del triángulo es de 1.5 pies, los ángulos de elevación de los puntos A y B son de 44°30' y 59°02', respectivamente, como se muestra en el diagrama. Calcula la longitud del diámetro AB. *Sol*. Diámetro AB = 17.12 pies



19. Los ángulos de elevación de un avión comercial respecto a dos puntos A y B, sobre el nivel del suelo, son de 60° y 78°56', respectivamente. Determina la altura a la cual se encuentra el avión si la distancia AB es de 7 km y el avión está localizado a la derecha de los dos puntos (elabora un esquema). *Sol*. altura = 118.34 km

20. Un barco recorre 210 km en dirección N 65° E, en seguida avanza 520 km en dirección S 35° E. ¿Qué distancia debe recorrer para llegar al punto de partida? *Sol*. 593.65 km

21. Desde la azotea de un edificio se localizan dos autos alineados sobre una avenida. Las líneas visuales forman con el piso de la avenida ángulos de 63° y 75°25', respectivamente. Si la distancia entre los autos es de 4.5 m ¿cuál es la altura del edificio? *Sol*. h = 7.29 m

22. Un barco zarpa de un puerto con un derrotero de 300°, recorre 100 millas náuticas y realiza su primera parada; al día siguiente zarpa con un derrotero de 70°, recorre 60 millas náuticas con su segunda parada. ¿Qué derrotero debe llevar para llegar al mismo punto de partida y qué distancia tiene que recorrer? *Sol*. 336º48'11", 76.72 millas náuticas.

Respuestas Triángulo rectángulo

1) El valor de las seis razones trigonométricas es:

$$sen\theta = \frac{5}{\sqrt{89}} = 0.5300 \qquad csc\theta = \frac{\sqrt{89}}{5} = 1.8867$$

$$cos\theta = \frac{8}{\sqrt{89}} = 0.8480 \qquad sec\theta = \frac{\sqrt{89}}{8} = 1.11792$$

$$tan\theta = \frac{5}{8} = 0.6250 \qquad cot\theta = \frac{8}{5} = 1.600$$

2) El valor de las seis razones trigonométricas es:

$$sen\theta = \frac{8.09}{13.85} = 0.5841 \qquad csc\theta = \frac{13.85}{8.09} = 1.7119$$

$$cos\theta = \frac{11.24}{13.85} = 0.8115 \qquad sec\theta = \frac{13.85}{11.24} = 1.2322$$

$$tan\theta = \frac{8.09}{11.24} = 0.7197 \qquad cot\theta = \frac{11.24}{8.09} = 1.3894$$

3) El valor de los tres lados y tres ángulos:

$Lado = 6.708$
$A = 26º33'54"$
$B = 63º26'6"$
$C = 90º$

4) El valor de los tres lados y tres ángulos:

$Lado = 6.7082$
$A = 48º11'22"$
$B = 41º48'38"$
$C = 90º$

5) El valor de las seis razones trigonométricas es:

$$sen\theta = \frac{5.36}{5.9793} = 0.8964 \qquad csc\theta = \frac{5.9793}{5.36} = 1.1155$$

$$cos\theta = \frac{2.65}{5.9793} = 0.4432 \qquad sec\theta = \frac{5.9793}{2.65} = 2.2563$$

$$tan\theta = \frac{5.36}{2.65} = 2.0226 \qquad cot\theta = \frac{2.65}{5.36} = 0.4944$$

6) La altura del anuncio de publicidad es de 2.99 m.

7) La altura del asta bandera es de 8.72 m.

8) El área que va a pintar de color naranja es de 285.6 cm^2.

9) Escribe tus resultados en la tabla correspondiente.

10) La longitud “L” de la escalera es de 10.67 m y la distancia “d” es de 7.06 m para colocar dicha escalera.

Resumen
Módulo 2

Resumen

En este capítulo se estudiaron los triángulos, elementos y su clasificación de acuerdo con sus ángulos y a sus lados.

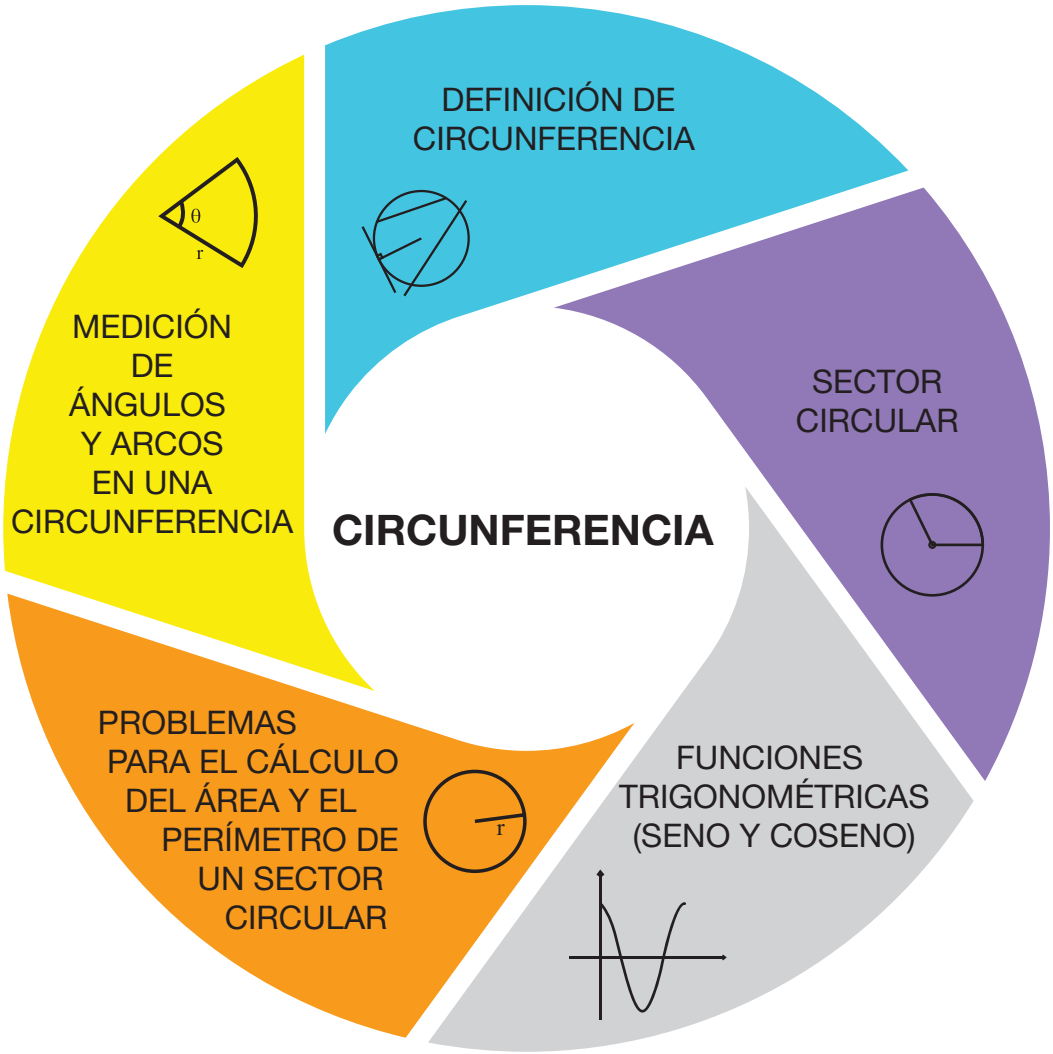
Se aprendió la resolución de triángulos según el tipo: rectángulo *u* oblicuángulo o una combinación de ambos, así como su aplicación e importancia en nuestro entorno.

M2
Basado en competencias

Módulo 3

Circunferencia

Diagrama de contenidos



M3
Basado en competencias

Propósito

Analizar la circunferencia y el sector circular para identificarlos y relacionarlos con su entorno, a la vez que se calcula su área y perímetro.

Competencias

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.
2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Competencias genéricas y atributos

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

Introducción

En la antigua Grecia se creía que la Tierra era una esfera perfecta, pero sólo por cuestiones filosóficas. Platón y Pitágoras no podían concebir la figura de la misma, que albergaba el pensamiento humano como algo no perfecto. Y, por supuesto, establecieron la idea de una esfera perfecta, aunque sin fundamentos. Es Aristóteles quien aporta evidencias de los dichos de su maestro Platón, al observar que, en los eclipses lunares, la sombra proyectada sobre la Luna tenía forma circular. Las preguntas continuaban y llegó el turno del tamaño. ¿Cuán grande era la Tierra?

Eratóstenes, filósofo, astrónomo, matemático y geógrafo, fue uno de los grandes pensadores de la antigüedad, sus contemporáneos lo apodaron “Beta”, porque afirmaban que, era el segundo mejor del mundo en todo. Sin embargo, fue el primero en determinar la circunferencia de la Tierra y, debido a que vivió en el siglo III a.C., sus herramientas sólo fueron palos, ojos, pies y su cerebro.

Siendo director de la Biblioteca de Alejandría, leyó en un papiro que en Siena, actualmente Asuán, Egipto, en el mediodía del 21 de junio, un palo vertical no proyectaba sombra. Pero en Alejandría no sucedía esto, sí proyectaba sombra, y se preguntó por qué. La primera conclusión que determinó fue que definitivamente la Tierra no podía ser plana, porque, si así lo fuera, el Sol produciría sombras de igual longitud para ambos palos, sin importar la distancia que los separara (el Sol está tan lejos que sus rayos son paralelos cuando llegan a la Tierra, véase la figura 1).

Comprendió entonces que la única respuesta posible era que la superficie de la Tierra estaba curvada, y cuanto mayor fuera la curvatura, mayor iba a ser la diferencia entre las longitudes de la sombra. Y quiso determinar la circunferencia de la Tierra. Sabía que la distancia entre Siena y Alejandría era de aproximadamente 7° a lo largo de la superficie de la Tierra, por la diferencia entre las longitudes de las sombras de los palos; si imaginamos los palos prolongados hasta llegar al centro de la Tierra, formarán un ángulo de 7°. Este resultado es aproximadamente una cincuentava parte de los 360° que contiene la circunferencia entera de la Tierra. Pero le faltaba un dato, la distancia entre Siena y Alejandría, por lo que contrató

a un hombre para que la midiera a pasos. El resultado era aproximadamente 5 040 estadios egipcios, que equivalía a 157.2 metros, una distancia de 792.29 kilómetros. Entonces, esta distancia entre Siena y Alejandría, da como resultado, multiplicando ambos, 39 mil 614.4 kilómetros. Esta debía ser la circunferencia de la Tierra, sólo un error de aproximadamente 1%, ya que la verdadera circunferencia es 40 008 km. ¡Impresionante!

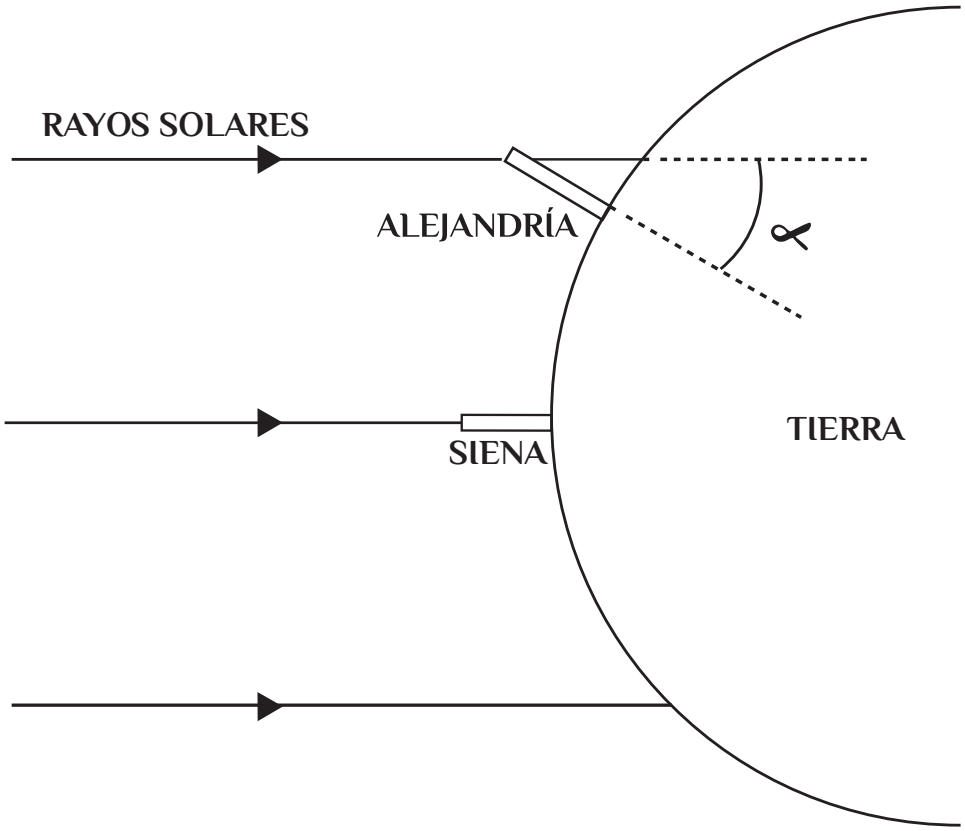


Figura 1. Eratóstenes y la circunferencia terrestre
Fuente: Tomado de http://elhombremediocre.blogspot.com/2006/11/eratstenes-y-la-circunferencia.html

1. Definición de circunferencia

La **circunferencia** se define como el lugar geométrico de sucesión de puntos situados en el plano, todos a la misma distancia de un mismo punto central, llamado centro de la circunferencia. El círculo es la región delimitada por la circunferencia (que es una curva y el círculo es una superficie).

Actividad:

Actividad
Módulo 3

Con base en elementos notables de la circunferencia, coloca la letra correspondiente en cada paréntesis:

C. centro	( )	segmento de recta que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella
R. radio	( )	es la recta que intercepta en dos puntos a la circunferencia
D. diámetro	( )	es un punto que está a la misma distancia de todos los puntos de la circunferencia
T. recta tangente	( )	es una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella
S. recta secante	( )	es el segmento rectilíneo que une dos puntos de la circunferencia
A. arco	( )	es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia
θ. ángulo central	( )	es la abertura entre dos radios con vértice en el centro, que intercepta un arco de circunferencia
Q. cuerda	( )	es la recta que intercepta en un sólo punto a la circunferencia

1.1 Elementos básicos de la circunferencia

Los elementos básicos que integran una circunferencia son:

Centro: punto central que está a la misma distancia de todos los puntos que pertenecen a la circunferencia.

Radio: segmento de recta que une el centro con cualquier punto que pertenece a la circunferencia.

Cuerda: segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de una circunferencia.

Diámetro: segmento rectilíneo que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro.

Recta secante: recta que corta dos puntos cualesquiera de una circunferencia.

Recta tangente: recta que toca a la circunferencia en un sólo punto y es perpendicular a un radio.

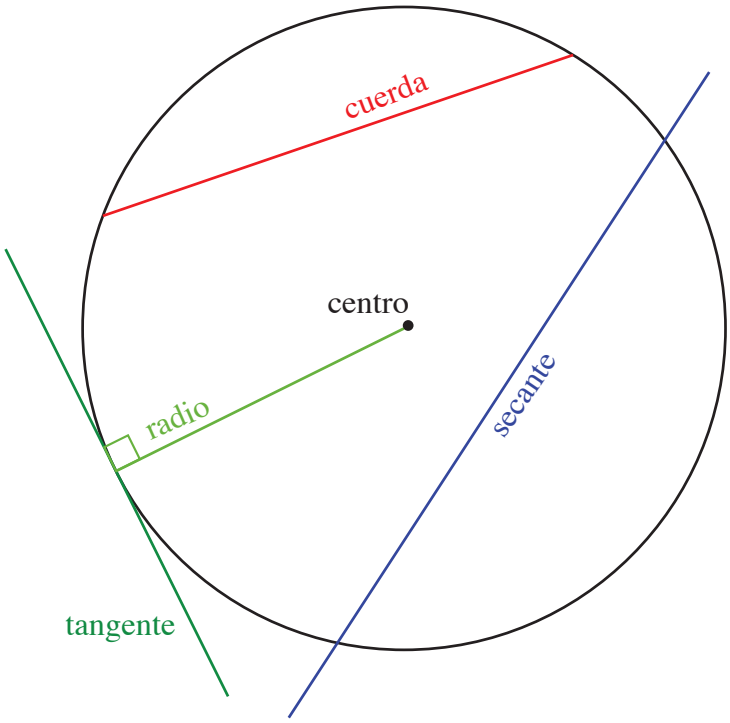


Figura 2. Elementos básicos de la circunferencia

Actividad
Módulo 3

Actividad:

1. Traza en seguida, o en tu cuaderno, tres circunferencias de radios: $r = 1\ cm, 5\ cm$ y $8\ cm$.

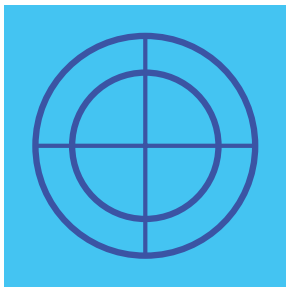
2. Escribe los elementos que fueron necesarios para el trazo de las circunferencias:

3. En tu última circunferencia traza, con diferentes colores, los siguientes elementos: C=centro, r=radio, D=diámetro, T=recta tangente, S=recta secante, A=Arco, θ =ángulo central, Q=cuerda. Coloca una letra para su identificación y entrégalo con tu nombre a tu profesor.

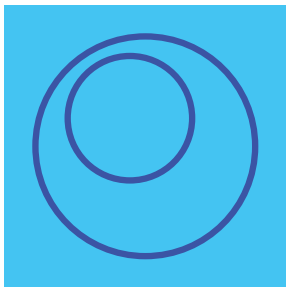
Para saber más:

Relación entre dos circunferencias

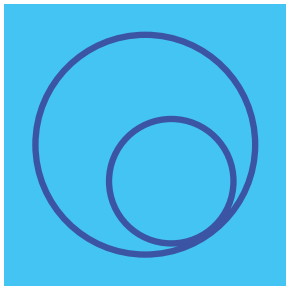
Circunferencias concéntricas: comparten el centro.



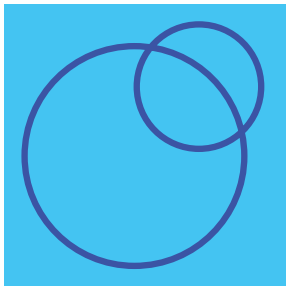
Circunferencias interiores: no comparten ningún punto, una está dentro de la otra.



Circunferencias tangentes interiores: comparten un punto estando una dentro de la otra.



Circunferencias secantes: comparten dos puntos.



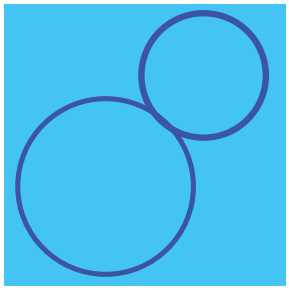
¿Sabías que? Módulo 3

La circunferencia de la cintura tiene forma de pera cuando la grasa se acumula en la cadera y los muslos. Este tipo de obesidad está relacionada con el dolor de rodillas y aparición de várices en las piernas.

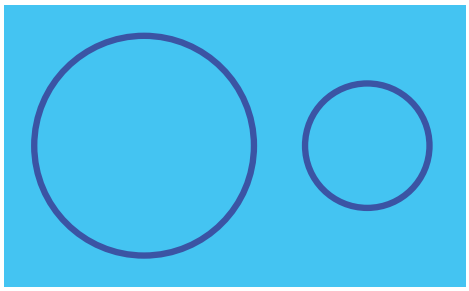
Fuente: www.imss.gob.mx/salud-en-linea/infografias/infografia-sobrepeso

M3 Basado en competencias

Circunferencias tangentes exteriores: comparten un sólo punto, la distancia entre sus centros es la suma de sus dos radios.



Circunferencias exteriores: no comparten ningún punto, la distancia entre sus centros es mayor a la suma de sus radios.



Fuente: http://www.memo.com.co/fenonino/aprenda/geometria/geomet2.html

A Actividad Módulo 3

Actividad:

1. Diferencias entre circunferencia y círculo

Circunferencia	Círculo
Traza una circunferencia de radio = 3 cm	Traza un círculo de radio = 3 cm
¿Cuánto mide su longitud?	¿Cuánto mide su área?
¿Cuáles son las diferencias entre una circunferencia y un círculo?	

2. Medición de ángulos y arcos en una circunferencia

Investiga otras formas para medir ángulos. Puedes consultar: http://www.vitutor.com/al/trigo/tri_1.html.

Las unidades utilizadas para la medida de los ángulos son:

- Grado sexagesimal
- Grado centesimal
- Radián (usado oficialmente en el Sistema Internacional de Unidades)

Trabajo en equipo
Módulo 3

Actividad en equipo:

1. Respondan a la siguiente pregunta: ¿cuántas veces cabe el radio en su circunferencia?

Sugerencia: pueden utilizar un alambre delgado como unidad de medida, con un largo de 3 a 4 cm.

2. Tracen la circunferencia y midan el radio colocando el alambre sobre la circunferencia. ¿Cuántas veces cupo el radio en la circunferencia?

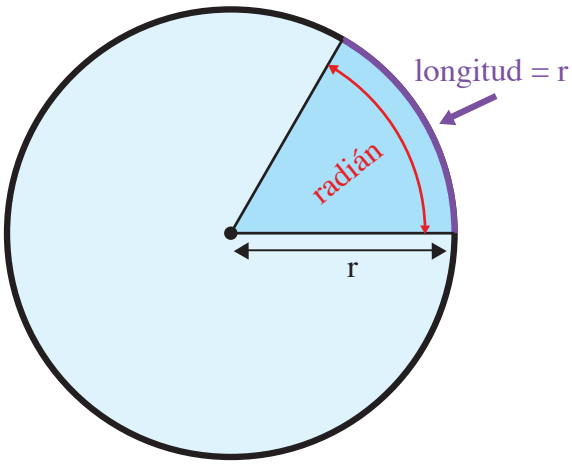
Comparen sus resultados con los otros equipos. ¿Es posible establecer una misma medida?____ ¿Cuál es? _____

Actividad
Módulo 3

Actividad:

Conoce la manera de transformar un ángulo entre unidades angulares, esto es, entre grados sexagesimales y radianes.

Traza en este espacio una circunferencia con un ángulo central de 360°.



Fuente: http://tatiana-acosta98.blogspot.mx/2011/11/historia-del-radian.html

M3
Basado en competencias

Radián

Un radián se define como la medida de un ángulo central cuyos lados cortan un arco igual en longitud al radio en la circunferencia del círculo (figura 3), ya que la longitud de este arco es igual a un radio del círculo, se dice que la medida de este ángulo es un radián.

$$1 \text{ radián} = (180/\pi)\,° = 57.296°$$

La ventaja de los radianes sobre los grados es solamente que ayudan a simplificar muchas fórmulas trigonométricas.

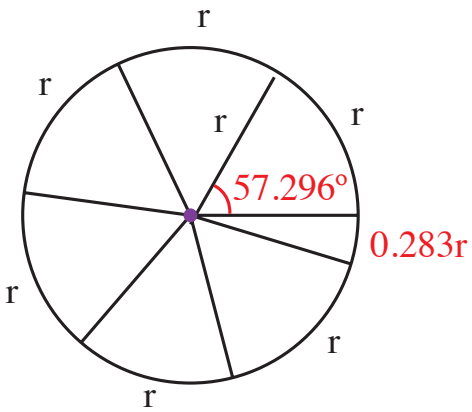


Figura 3. Radián
Fuente: http://rpdp.net/mathdictionary/spanish/vmd/full/r/radian.htm

Para convertir grados a radianes o radianes a grados sexagesimales tenemos que:

$$360° = 2\pi\, rad$$

si se divide entre 2, queda la expresión simplificada

$$180^{o} = \pi\, rad$$

Posteriormente podemos realizar una regla de tres para hacer estas conversiones.

Ejemplo: expresa en radianes los siguientes ángulos:

a) 30°= b) 45°= c) 60°=
d) 90°= e) 120°= f) 150°=

π es medido en *rad*

Solución:

a) 30°= : Se puede plantear la proporción $180^{o} = \pi\, rad$ $30^{o} = x\, rad$ ---------- *Despejando x:* $x = \frac{(30^{o})\, rad}{180^{o}}$ ---------- $x = \frac{3\pi rad}{18}$ **Simplificando la fracción:** $x = \frac{\pi}{6} rad$ **En decimales:** $x = 0.5236\ rad$	**b) 45°= : Se puede plantear la proporción** $180^{o} = \pi\, rad$ $45^{o} = x\, rad$ ---------- *Despejando x:* $x = \frac{(45^{o})\, \pi rad}{180^{o}}$ ---------- $x = \frac{15\pi rad}{60}$ **Simplificando la fracción:** $x = \frac{\pi}{4} rad$ **En decimales:** $x = 0.7854\ rad$	**c) 60°= : Se puede plantear la proporción** $180^{o} = \pi\, rad$ $60^{o} = x\, rad$ ---------- *Despejando x:* $x = \frac{(60^{o})\, \pi rad}{180^{o}}$ ---------- $x = \frac{6\pi rad}{18}$ **Simplificando la fracción:** $x = \frac{\pi}{3} rad$ **En decimales:** $x = 1.0472\ rad$
d) 90°= : Se puede plantear la proporción $180^{o} = \pi\, rad$ $90^{o} = x\, rad$ ---------- *Despejando X:* $x = \frac{(90^{o})\, \pi rad}{180^{o}}$ ---------- $x = \frac{9\pi rad}{18}$ **Simplificando la fracción:** $x = \frac{\pi}{2} rad$ **En decimales:** $x = 1.5708\ rad$	**e) 120°= : Se puede plantear la proporción** $180^{o} = \pi\, rad$ $120^{o} = x\, rad$ ---------- *Despejando x:* $x = \frac{(120^{o})\, \pi rad}{180^{o}}$ ---------- $x = \frac{12\pi rad}{18}$ **Simplificando la fracción:** $x = \frac{2\pi}{3} rad$ **En decimales:** $x = 2.0944\ rad$	**C 150°= : Se puede plantear la proporción** $180^{o} = \pi\, rad$ $150^{o} = x\, rad$ ---------- *Despejando x:* $x = \frac{(150^{o})\, \pi rad}{180^{o}}$ ---------- $x = \frac{15\pi rad}{18}$ **Simplificando la fracción:** $x = \frac{5\pi}{6} rad$ **En decimales:** $x = 2.6180\ rad$

Actividad:

Expresa en radianes los siguientes ángulos:

Actividad
Módulo 3

a) 35°=
b) 48°=
c) 70°=
d) 115°=
e) 150°=
f) 175°=
g) 220°=
h) 280°=
i) 330°=

π es medido en *radianes*

3. Sector circular

Ángulo central

Es el que tiene su **vértice** en el **centro** de la circunferencia y los radios son los lados de ella.

El ángulo BOA de la figura 4 es un ejemplo de ángulo central.

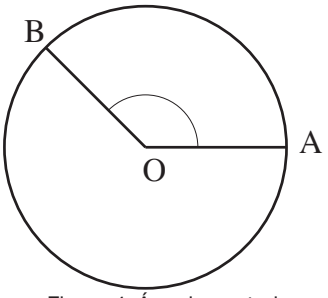
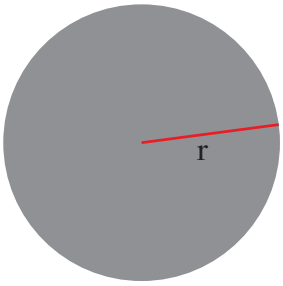


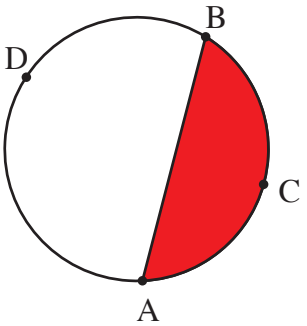
Figura 4. Ángulo central

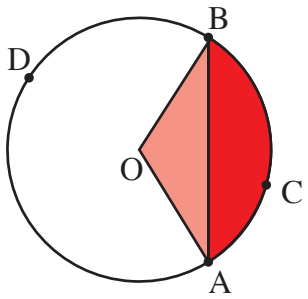
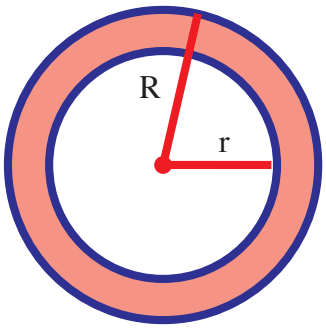
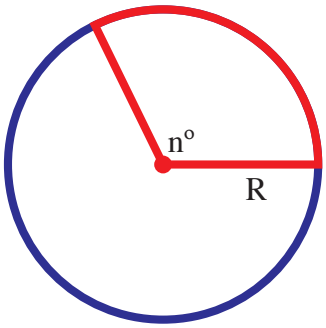
Perímetro de la circunferencia: $P = 2\pi r$

Área del círculo: $A = \pi r^2$



Elementos del círculo

	**Segmento circular:** es cada una de las partes en que se divide un círculo cuando se traza una cuerda AB. Si la cuerda es un diámetro, cada parte será un semicírculo.

	**Sector circular:** es la parte del círculo limitada por dos radios y un arco.
	**Corona circular:** es la porción del plano comprendida entre dos circunferencias concéntricas.
	**Arco de circunferencia:** es una parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

Fuente: http://www.profesorenlinea.cl/geometria/CirculoCircunfelementos.htm

Actividad en equipo:

Situación de aprendizaje

Ocho compañeros se reunieron en la casa de Alfonso para estudiar Trigonometría, y por recomendación de su profesor cenarían pizza en forma circular para estudiar los conceptos de sector circular.

Trabajo en equipo
Módulo 3

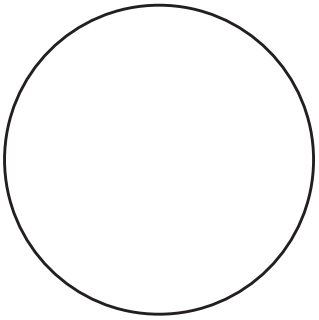
Apertura
Módulo 3

Imágenes
Fuente: shutterstock

Conocimientos previos: concepto de circunferencia, radio, centro, sector circular, área, perímetro, porcentaje.

Desarrollo
Módulo 3

Con las dimensiones de la pizza obtendrán los siguientes datos:



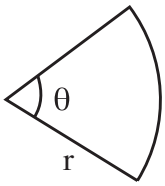
Diámetro _____ cm

Radio _____ cm

Perímetro _____ cm

Área _____ cm^2

Corten una rebanada en forma de sector circular y obtengan los siguientes datos:



Longitud de arco

$S = r\theta$

Ángulo _____ grados

Ángulo _____ rad

Longitud del arco _____ cm

Área del sector circular _____ cm^2

M3 Basado en competencias

Si dividen el círculo original en 15 partes iguales, obtengan:

Área de un sector circular de cada parte: _____

Ángulo central del sector circular anterior: _____

Longitud del arco del sector circular de cada parte: _____

Cierre
Módulo 3

Conclusiones

Escribe con tus palabras cómo se calcula la longitud del arco de un sector circular:

_____

_____

_____

Escribe con tus palabras cómo se calcula el área de un sector circular:

_____

_____

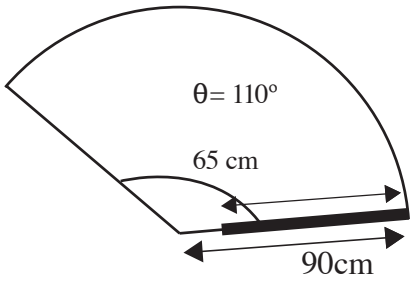
_____

Trabajo en equipo
Módulo 3

Actividad en equipo:

Ejemplo:

Un limpiador de parabrisas de un automóvil mide 90 cm de largo y el hule mide 65 cm; si al moverse gira un ángulo de 110º, calcula el área que limpia.



Parabrisas
Fuente: shutterstock

Conocimientos previos

Cálculo del área de un sector circular $A = \frac{\theta r^2}{2}$, θ *radianes*

Transformar la medida de un ángulo en sistema sexagesimal a sistema cíclico.

Solución:

Para calcular el área que limpia el hule, primero se calculará el área del limpiador completo y se restara el área que no limpia el hule. $A_T = A_{90} - A_{25}$

Cálculo de áreas

Transforma el ángulo central en grados a radianes:	$\theta = 110^{\circ}\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}}\right) = 1.92 \text{ rad}$
Cálculo del área del sector circular con radio de 90 centímetros:	$A_{90} = \frac{1.92(0.90)^2}{2}$
Simplificando:	$A_{90} = 0.777 \text{ m}^2$
Obteniendo la diferencia de la longitud del limpiador menos la longitud del hule, (radio sin hule):	$90 - 65 = 25 \text{ cm}$ $= 0.25 \text{ m}$
Cálculo del área del sector circular de radio de 25 centímetros que no limpia:	$A_{25} = \frac{1.92(0.25)^2}{2}$ $= 0.06 \text{ m}^2$
Obtención del área que limpia el hule:	$A_T = A_{90} - A_{25}$
Sustitución:	$A_T = 0.777 \text{ m}^2 - 0.06 \text{ m}^2$
El área que limpia el hule es de:	$A_T = 0.72 \text{ m}^2$

Conclusión

El área que seca el limpiaparabrisas es de casi tres cuartos de un m^2, exactamente 0.72 m^2.

Actividad
Módulo 3

Actividad:

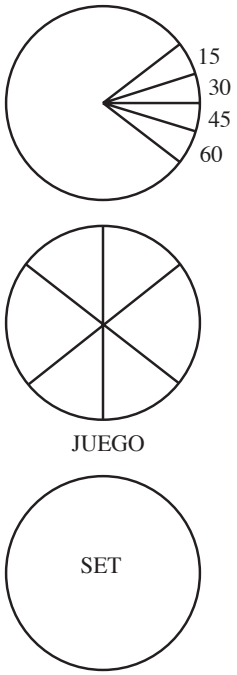
Calcula el área de un limpiador de parabrisas de un automóvil que esté a tu alcance. Mide en metros tanto el largo del brazo del limpiador como el del hule. Calcula aproximadamente el ángulo central en el que gira el limpiador.

M3
Basado en competencias

¿Sabías que?
Módulo 3

El origen de la puntuación en el Tenis viene de la Edad Media, cuando la observación de los astros era común, así como el uso de un instrumento formado por la sexta parte de un círculo que sirve para medir ángulos. Por esto, en el Tenis los puntos cuentan de 15 en 15 (15-30-45-60), de tal modo que cada juego suma 60 puntos; tiene 6 sets de 4 juegos, cada uno vale 15 "grados" y se proclama vencedor aquel que primero logra completar el círculo de 360° de la esfera celeste de los astros.

Fuente: htttp://www.amistad2003.com/sabias.htm



Actividad
Módulo 3

Actividad:

Situación de aprendizaje

Del ejemplo anterior, si la bicicleta recorre 210 metros ¿Cuántas revoluciones o vueltas ha dado la rueda?

Apertura
Módulo 3

Conocimientos previos

Calcular la longitud de un arco $s = l = r\theta$, θ en $radianes$

Transformación de un ángulo en sistema sexagesimal a sistema cíclico.

Se sabe que la longitud y el radio son: $l = 210m$, $r = 29\ cm$

De la longitud de arco despejando el ángulo:	$\theta = \frac{l}{r}$
Sustituyendo y simplificando:	$\theta = \frac{210\ m\ (rad)}{0.29\ m}$

Transformación del ángulo del sistema cíclico a sistema sexagesimal:	$\theta = (724.13\ rad)\left(\frac{180^{\circ}}{\pi\ rad}\right)$
Aplicando regla de tres: 1 revolución: 360 grados:: θ 41489.59 grados	$\theta = \frac{41489.59^{\circ}\ (1\ revolucion)}{360^{\circ}}$
Cuando recorre 210 metros la rueda ha dado:	115.25 revoluciones o vueltas.

Conclusión

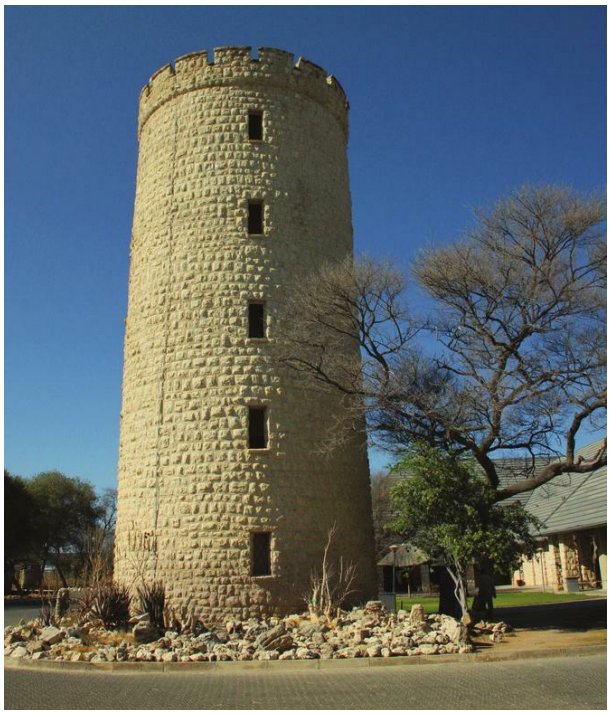
Cierre
Módulo 3

Apertura
Módulo 3

Actividad:

Situación de aprendizaje

¿Cuánto se pagará por la construcción de la barda perimetral de un terreno con forma de sector circular, si el radio es de 23 m y el ángulo central mide 135º? Considera el costo de construcción de barda (mano de obra, primer nivel) a 500 pesos, por metro lineal, 100 pesos más el segundo nivel, 200 pesos más el tercer nivel, y el remate 50 pesos más.



Construcción en forma de sector circular
Fuente: shutterstock

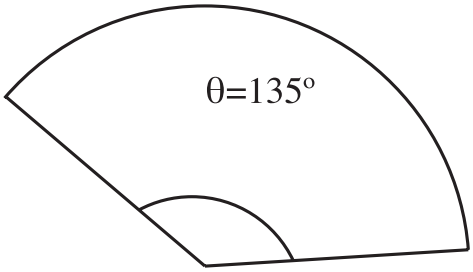
Conocimientos previos

Concepto de perímetro

Cálculo de la longitud de un arco $s = l = r\theta,\ \theta\ en\ radianes.$

Transformación de un ángulo en sistema sexagesimal a sistema cíclico.

El modelo gráfico que representa a la situación problema es:



Desarrollo
Módulo 3

M3
Basado en competencias

Obtener la longitud de arco:	$l = r\theta \qquad \theta \text{ en radianes}$
Transformar del ángulo del sistema cíclico a sistema sexagesimal:	
Sustituir y simplificar:	$l = 23\left(\frac{135^{\circ}\pi}{180^{\circ}}\right) metros$
Obtener el perímetro:	$P = r + r + l$ $P = 23 + 23 + 54.19\ m$ $P = 100.19\ m$
Obtener el costo de la barda (primer nivel):	$C_T = (500)(100.19) = 50\ 095$ pesos
Obtener el costo de la barda (segundo nivel):	$C_T = (600)(100.19) = 60\ 114$ pesos
Obtener el costo de la barda (tercer nivel):	$C_T = (700)(100.19) = 70\ 133$ pesos
Obtener el costo de la barda (remate):	$C_T = (750)(100.19) = 75\ 142.50$ pesos

Cierre
Módulo 3

Conclusión

El perímetro de la barda es de 100.19 m y el costo de la barda para el primer nivel, es (500)(100.19) igual a 50 095 pesos.

Ejemplo:

La longitud de una circunferencia es de 63.96 cm. ¿Cuál es el área del círculo?

Solución:

Longitud del círculo = $2\pi r$

63.96 cm = $2\pi r$

$$r = \frac{63.96}{2\pi} = 10.18cm$$

$$A = \pi\,(10.18)^2 = 325.57cm^2$$

Actividad:

Actividad
Módulo 3

La longitud de una circunferencia es de 69.23 cm ¿Cuál es el área del círculo?
Respuesta: 381.40 cm^2

Longitud de arco

Un arco es cualquier porción de la circunferencia de un círculo.

La longitud del arco (s) de una circunferencia es la distancia que hay desde un punto inicial A hasta un punto final B.

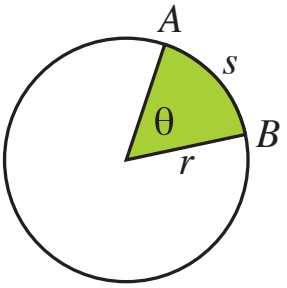


Figura 6. **Longitud de arco**

La longitud de arco **s** se calcula con las siguientes relaciones:

$$s = \theta r$$

$$s = \theta\left(\frac{d}{2}\right)$$

θ en radianes

Recuerda que: π rad = 180°

Ejemplo:

En un sector circular, el ángulo central mide 60° y el radio 16 cm. ¿Cuánto mide su longitud de arco?

Solución:

Convirtiendo de grados a radianes se tiene:

$$\theta = 60^{\circ}\left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^{\circ}}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{30} \text{ rad}$$

Entonces, la longitud de arco es:

$$s = \theta r$$

$$s = \left(\frac{\pi}{30}\text{rad}\right)(16\text{cm})$$

$$s = 1.67\text{cm}$$

Actividad
Módulo 3

Actividad:

En un sector circular el ángulo central mide 45° y el radio 9 cm. ¿Cuánto mide su longitud de arco?

Respuesta: $s = 7.07cm$

Ejemplo:
En un sector circular, el ángulo central mide 18° y el ángulo correspondiente mide $6\pi m$. ¿Cuánto mide su radio?

Solución:
Convirtiendo de grados a radianes se tiene:

$$\theta = 18^{\circ}\left(\frac{\pi rad}{180^{\circ}}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{10} rad$$

Entonces, de la fórmula de longitud de arco:

$$s = \theta\, r$$

$$r = \frac{s}{\theta}$$

$$r = \frac{6\pi\ m}{\frac{\pi}{10}}$$

$$r = 60\ m$$

M3
Basado en competencias

Actividad
Módulo 3

Actividad:

En un sector circular, el ángulo central mide 15° y el ángulo correspondiente, $20\pi m$. ¿Cuánto mide su radio?

Respuesta: $r = 240\ m$

Ejemplo:
El péndulo de un reloj mide 60 cm y al desplazarse cada lado del eje vertical mide $\beta = 15^{\circ}$. ¿Cuál es la longitud de arco que describe el péndulo?

Solución:
Convirtiendo de grados a radianes se tiene:

$$\beta = 15^{\circ}\left(\frac{\pi rad}{180^{\circ}}\right)$$

$$\beta = \frac{\pi}{12} rad$$

pero:

$$\theta = 2\beta$$

$$\theta = 2\left(\frac{\pi}{12} rad\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} rad$$

Entonces, la longitud de arco es:

$$s = \theta\, r$$

$$s = \left(\frac{\pi}{6} rad\right)(60cm)$$

$$s = 31.41\ cm$$

Actividad:

Actividad
Módulo 3

El péndulo de un reloj mide 32 cm y al desplazarse, $\alpha = 30º$ de cada lado del eje vertical. ¿Cuál es la longitud de arco que describe el péndulo?

Respuesta: $s = 50.26\ cm$

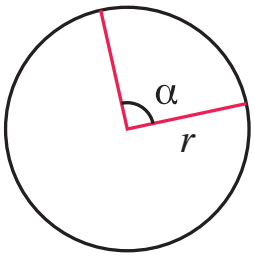
¿Sabías que?
Módulo 3

Los antiguos griegos fueron los primeros en advertir que nuestro planeta es esférico. Aristóteles, quien vivió hace veintitrés siglos, indicó que la Tierra era redonda. Basó su afirmación en que algunas estrellas, que eran visibles desde Grecia, no podían ser vistas desde Egipto, situado al sur. Más tarde otro sabio griego, Eratóstenes, geógrafo y astrónomo de Alejandría, logró medir, por primera vez, la circunferencia terrestre. Eratóstenes supo que en Siena (hoy llamada Asuán), ciudad del sur de Egipto, la luz llegaba verticalmente hasta el fondo de un pozo el mediodía del 21 de junio. En Alejandría, al norte de Siena, a la misma hora de ese día los rayos solares formaban un ángulo de 7.2° con una pared vertical.

Fuente: historiaybiografias.com

Área del sector circular

Es la región delimitada por los dos radios y la longitud de arco de la circunferencia en estudio.

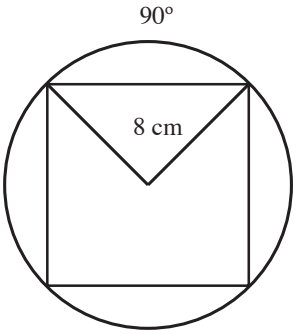


$$A = \frac{\pi(r)^2\alpha}{360^\circ}$$

$$A = \frac{rL}{2} = \frac{r^2\theta}{2} = \pi r^2 \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Ejemplo:
Halla el área del sector circular de la siguiente figura, cuya cuerda es el lado del cuadrado inscrito, siendo 4 cm el radio de la circunferencia.

$$A = \frac{(\pi)(8)^2(90^\circ)}{360^\circ}$$



Calculando el radio del círculo al que pertenece y la longitud de la circunferencia se obtiene los siguientes resultados:

$$\frac{(\pi)(r)^2(90^\circ)}{360^\circ} = 4\pi$$

$$\frac{r^2}{4} = 4$$

$$r^2 = 16$$

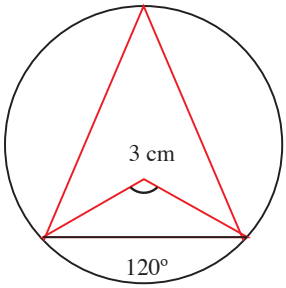
$$r = \sqrt{16}$$

$$r = 4\ cm$$

$$L = 2\,\pi\, r$$

$$L = (2)\,(\pi)\,(4) = 25.13\ cm$$

Ejemplo:
Calcula el área de un sector circular cuya cuerda es el lado del triángulo equilátero inscrito, si el radio de la circunferencia es de 3 cm.



$$A = \frac{\pi(r)^2\alpha}{360°}$$

$$A = \frac{(\pi)(r)^2(120)}{360°}$$

$$A = 9.42\ cm^2$$

Actividades:

Actividad
Módulo 3

1. Calcula el área de un sector circular cuyo ángulo mide 40° y su radio, 10 m.
2. Calcula el área del sector circular de la figura mostrada.
3. En un sector circular de área igual a 100 π, se reduce su ángulo a la mitad y el radio se duplica, se obtiene un nuevo sector circular cuya área es:
4. Dada la figura, AOB y COD son sectores circulares. Halla el área de la región limitada por ABCD (en u^2).
5. Dada la figura, determina el perímetro del sector circular COD; se sabe que el área de la región limitada por el trapecio circular es 7/4 u^2.
6. Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra, a una altura de 572 km. En un intervalo de tiempo, su radio vector (origen en el centro de la Tierra), genera un ángulo de 100°. ¿Cuál es el área de la región barrida por el radio vector? Considera el radio de la Tierra igual a 6 376 km.

Problemas para el cálculo del área y el perímetro de un sector circular

Ejemplo:
Calcula la magnitud del ángulo central en grados de un sector circular de radio igual a 22 cm, que genera una longitud de arco de 50 cm. Determina también su área y perímetro.

Solución:
De la fórmula $s = \theta\, r$ se sustituyen los datos que se tienen: $s = 50$ cm y $r = 22$ cm.

Se despeja θ: $\theta = \frac{s}{r} = \frac{50}{22} = 2.27$ radianes

El ángulo en grados es: $\pi\ rad = 180°$
$2.27\ rad = x°$

$x° = 180°(2.27\ rad)\ \pi$ rad$= 130°$

El ángulo central es de 130°.

Para calcular el área del sector circular:

$$A = \frac{r^2\theta}{2} = \frac{(22)^2(2.27)}{2} = 549.34\ \text{cm}^2$$

El perímetro: $P = 2r + s$

Sustituyendo cantidades: $P = 2(22) + 50$

$P = 94$ cm.

Actividad
Módulo 3

Actividad 1:

Calcula la magnitud del ángulo central de un sector circular, el cual debe de estar en radianes si tiene de radio 12 m y genera una longitud de arco de 32 m. Además, obtén su área y perímetro y dibuja el sector circular con todos sus elementos.

M3
Basado en competencias

Ejemplo:
Calcula el área que riega un aspersor radial si su alcance es de 14 m y gira en un ángulo de 210°. Haz una figura y escribe todas tus operaciones para dar el resultado en metros cuadrados.

Solución:
Para convertir el ángulo a radianes: $\theta = 210°(\pi \text{ rad})180° = 3.67$ rad.

$$142\ (3.67)\ 2 = 359.66\ \text{m}2$$

Actividad
Módulo 3

Actividad 2:

1. Calcula el área que riega un aspersor radial si su alcance es de 7 m y gira un ángulo de 220°. Haz una figura y escribe todas tus operaciones para dar el resultado en metros cuadrados.

3. Calcula el área que riega un aspersor radial si su alcance es de 18 m y gira un ángulo de 300°. Haz una figura y escribe todas tus operaciones para dar el resultado en metros cuadrados.

Ejercicios

1. En una circunferencia de 15 cm de radio, un ángulo central de $\frac{\pi}{6}$ radianes 29 intercepta un arco que mide: _____

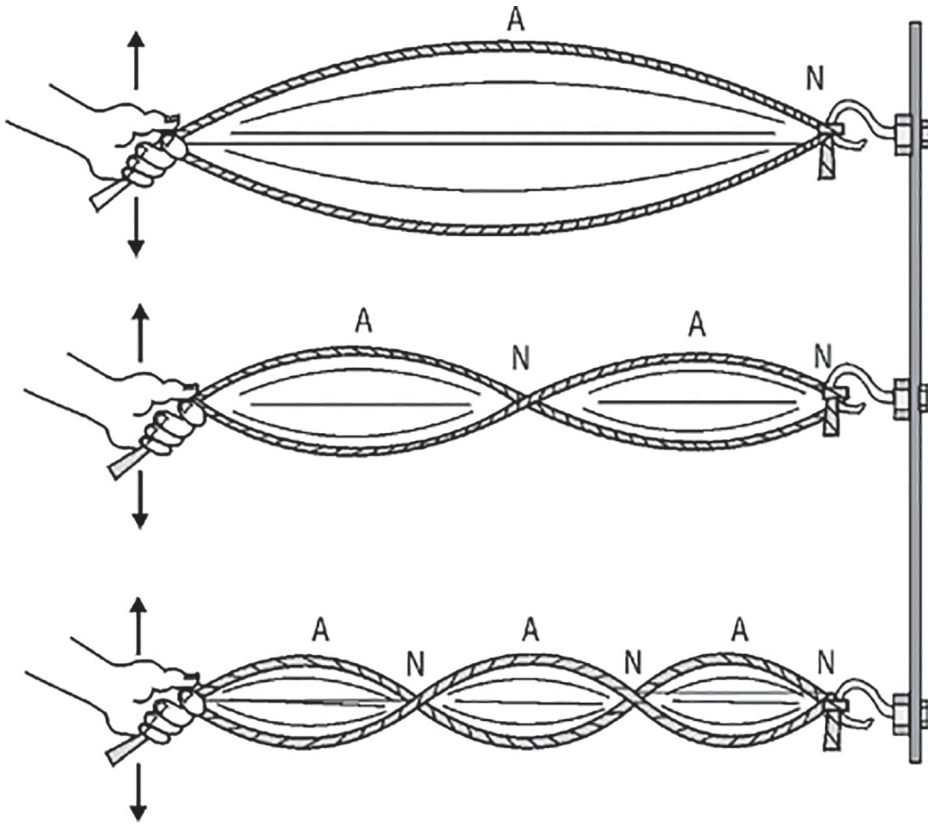
2. Calcula la magnitud del ángulo central, en grados, de un sector circular de radio igual a 22 cm, que genera una longitud de arco de 50 cm. Determina, además, su área y perímetro.

4. Gráficas de las funciones trigonométricas

Un poco de historia: el problema de la cuerda vibrante

El problema de la cuerda vibrante, mostrada en la figura 1, surge en la segunda mitad del siglo XVIII como un reto a grandes matemáticos de la talla de los hermanos Bernoulli, Euler, D'Alambert y Lagrange. Euler y D'Alambert propusieron soluciones en términos de funciones arbitrarias que representaban dos ondas, una se movía a lo largo de la cuerda hacia la derecha y la otra hacia la izquierda, con velocidad igual a la constante c. Por otro lado, Daniel Bernoullí, planteó la solución al problema mediante series infinitas de funciones trigonométricas.

Nota: Sin θ = Sen θ



Fuente: https://line.do/es/historia-del-calculo-diferencial/qa6/vertical

Figura 1. **La cuerda vibrante**

Función

Una función **F** real, de variable real, es una relación matemática entre dos conjuntos de números reales x y y, de tal manera que **F** asigna a cada elemento del primer conjunto un sólo elemento del segundo conjunto. Al primer conjunto se le denomina **dominio** y al segundo **rango** o imagen de la función.

De forma general, **F** puede escribirse en la forma:

$F = \{(x,y)/y = f(x), x \in \mathbb{R}\}$, que se lee

"**F** es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y), tal que y es una función de x, x es un número real".

Donde $y = f(x)$ representa la regla de correspondencia o de asociación entre $x \wedge y$. En teoría de funciones, "x" es la variable independiente y "y" es la variable dependiente.

Ejemplo:
Realiza un análisis de la función definida por la ecuación $y = 2x+1$, indica su dominio y rango. Traza su gráfica

Solución:
La relación $y = 2x+1$, escrita en términos funcionales como $f(x)= 2x+1$, es la regla de correspondencia de una función algebraica de primer grado, con dominio y rango el conjunto de los números reales. Asigna a cada x del dominio un correspondiente y del rango, cuyo valor es el doble de x aumentado en 1.

Si consideramos un subconjunto del dominio de $x \in [-2,3]$, por ejemplo, las imágenes correspondientes en el rango pueden observarse en la figura 2 junto con su modelado gráfico.

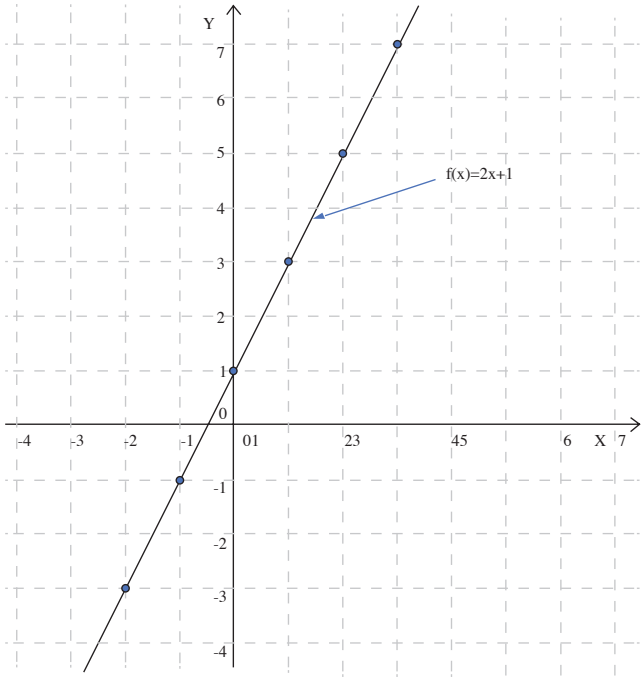
x	$y = f(x) = 2x + 1$	Gráfica
–2	$f(-2) = 2(-2)+1 = -3$	
–1	$f(-1) = 2(-1)+1 = -1$	
0	$f(0) = 2(0)+1 = 1$	
1	$f(1) = 2(1)+1 = 3$	
2	$f(2) = 2(2)+1 = 5$	
3	$f(3) = 2(3)+1 = 7$	

Figura 2. Gráfica de la función y = 2x+1

Basado en competencias

Actividad:

Actividad
Módulo 3

Analiza cada una de las siguientes funciones. Indica el dominio y rango de cada una de ellas y traza su gráfica en el intervalo indicado.

1. $y = x^2 + x - 4;\ x \in [-4,4]$

2. $y = \dfrac{1}{x-2};\ x \in [-2,6]$

5. Funciónes trigonométricas (seno y coseno)

Es una función real, de variable real, donde la regla de correspondencia es de naturaleza trigonométrica, es decir, la relación entre x y y la establece una expresión matemática que contiene una o más funciones trigonométricas directas, recíprocas o una combinación de ellas. Algunos ejemplos de relaciones que representan reglas de correspondencia con esta naturaleza son las siguientes:

$y = 3sen\ (2x)$

$y = 5cos\ (x + \pi)$

$y = tan\ (3x)$

Variación de las funciones trigonométricas

La variación de las funciones trigonométricas directas y recíprocas, y las propiedades características de ellas para un cierto intervalo angular, pueden observarse a partir de considerar su representación gráfica en un sistema de coordenadas cartesianas. Por ello es preferible hablar de las funciones trigonométricas de números reales, en lugar de funciones trigonométricas de ángulos, es decir, el dominio será un conjunto de números reales y el rango también. El empleo del sistema cíclico en lugar del sistema sexagesimal de unidades angulares será nuestra herramienta fundamental.

Sea u la medida en radianes del ángulo central θ, que subtiende un arco con extremo inicial en M(1,0), y con extremo final en P(*x,y*) sobre el círculo unitario (figura 3).

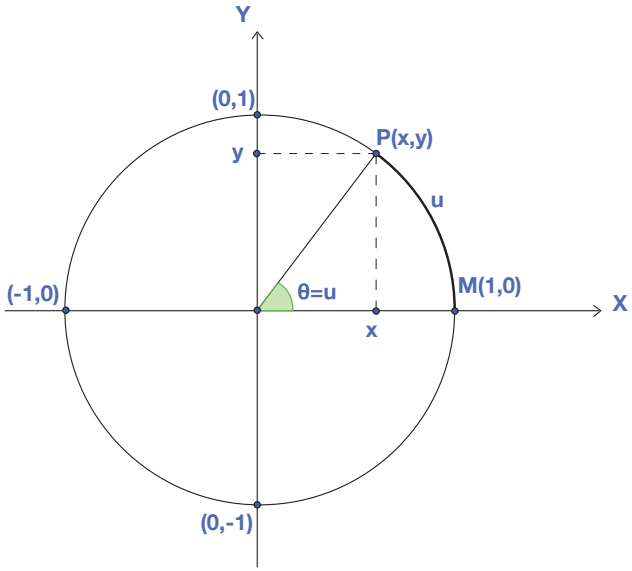


Figura 3. **Círculo unitario**

De acuerdo con la definición de las funciones trigonométricas de un ángulo en posición normal θ, cuya medida es u radianes, las funciones seno y coseno quedan definidas como:

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{r} \text{ y } \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \text{como } r = 1, \text{ entonces}$$

$$y = \text{sen } u$$

$$x = \cos u$$

Cada número real u define un par de números ordenados: $x = \cos u$ y $y = \text{sen } u$, por lo que el punto $P(x, y)$ puede expresarse como $P(\cos u, \text{sen } u)$. El conjunto de todas las parejas

ordenadas de números reales $(u, \cos u)$ recibe el nombre de **función coseno,** definido en el campo de los números reales, mientras que el conjuntos de todas las parejas ordenadas $(u, \operatorname{sen} u)$ se denomina **función seno** en los reales.

En su forma más elemental y para fines del trazo de sus gráficas, las funciones seno y coseno pueden escribirse, respectivamente, en términos de sus reglas de correspondencia, como:

$y = \operatorname{sen} u,\ u \in \mathbb{R}$

$y = \cos u,\ u \in \mathbb{R}$

Cuando u aumenta de 0 a 2π radianes, el punto $P(x,y)$ gira en torno del círculo unitario de la figura 3, siguiendo el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, al mismo tiempo, sus coordenadas (x, y) experimentan un cambio traslacional en la dirección horizontal y vertical, descritas por las funciones coseno y seno, respectivamente. Se puede observar en dicha figura que las variaciones de x y y quedan definidas en el intervalo $x \in [-1,1]$.

M3 Basado en competencias

5.1 Variación de la función seno

Para entender lo que más adelante ampliaremos, vamos ahora a realizar un análisis de la variación de la función seno en su forma mas simple, es decir, para $y = \operatorname{sen} u$ en el intervalo de 0 a 2π. Lo primero que hacemos es calcular algunos pares ordenados $(u, \operatorname{sen} u)$ para, finalmente, ubicarlos en el plano cartesiano y unirlos mediante una curva suave que pase por ellos. Para tal propósito habrá que expresar la variación angular de θ en términos de radianes definidos por el número real u.

Recuerda que:

$180° = \pi$ rad.

Por ejemplo, el valor del ángulo $\theta = 90°$ a radianes se obtiene realizando la siguiente operación.

$$\theta = 90°\left(\frac{\pi \text{rad}}{180°}\right) = 90°\frac{\pi \text{rad}}{(90°)(2)}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}\text{rad}$$

Variación de la función Seno									
$y = \operatorname{sen} u$	0.0	0.707	1.0	0.707	0.0	-0.707	-1.0	-0.707	0.0
u (radianes)	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
u (grados)	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°

Si trazamos los pares ordenados $(u, \operatorname{sen} u)$ en un sistema de coordenadas cartesianas, la variación de la función y= sen u queda modelada en la gráfica de la figura 4.

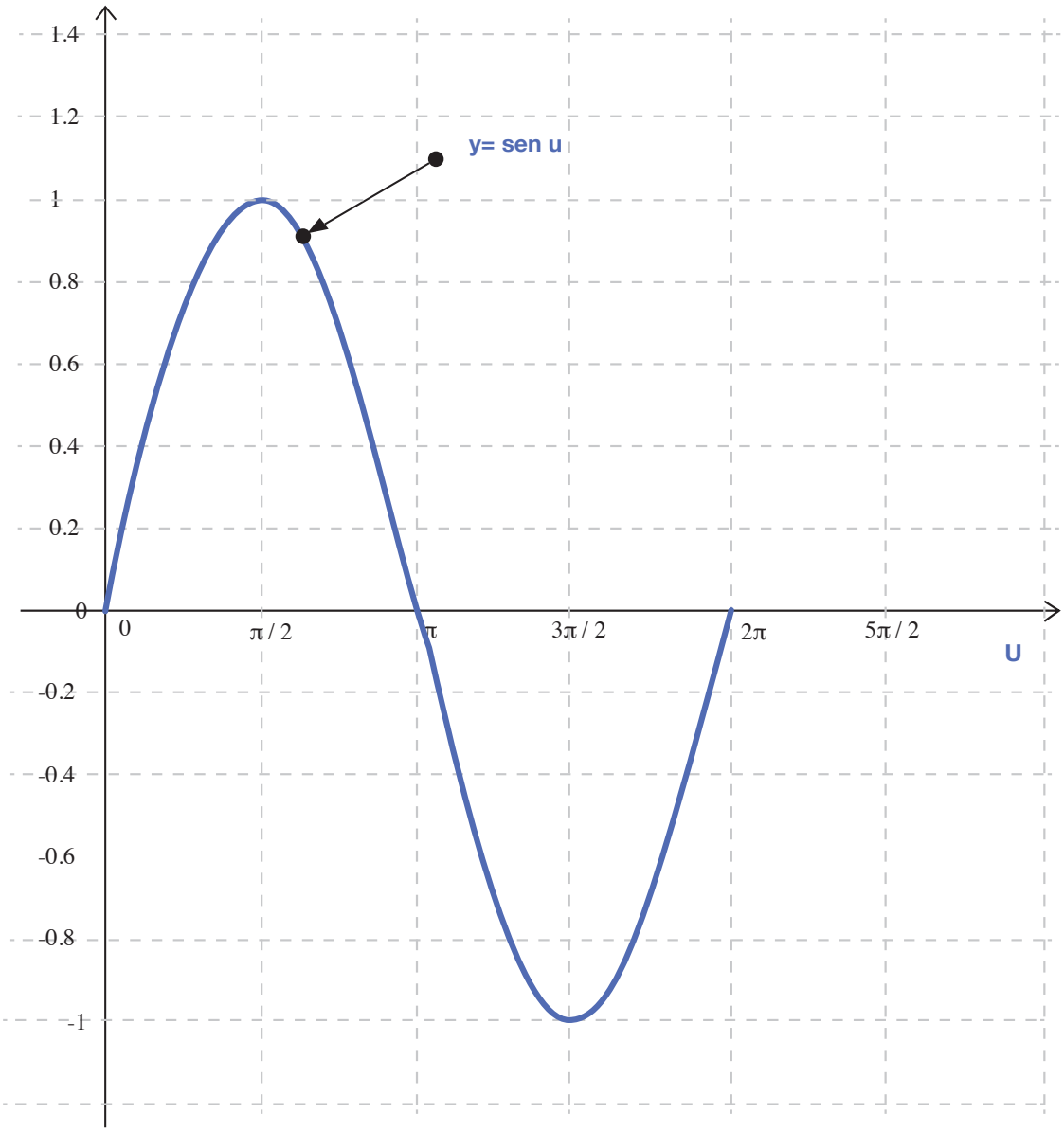


Figura 4. Variación de la función seno en el intervalo de 0 a 2π

Como puede observarse en la figura 4, la gráfica de la función seno presenta las siguientes propiedades:

Dominio:	$u \in \mathbb{R}$
Rango o recorrido:	$y \in [-1, 1]$
Valores máximos:	en $u = \frac{\pi}{2}, 2\pi, \frac{7}{2}\pi$
Valores mínimos:	en $u = ..., -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, ...$
Intersecciones:	$u = ..., -\pi, 0, 2\pi, 3\pi, ..., n\pi$, n = entero
Periódo:	2π

Nota: $\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\pi$

La variación de la función seno para valores menores que 0 radianes, o mayores que 2π, vuelven a ser iguales a las del intervalo analizado en la gráfica de la figura 4, se dice entonces que la función seno es ***periódica,*** con periódo 2π.

De manera general, la propiedad periódica de la gráfica de la función seno, mostrada en la figura 5, se cumple para cualquier número entero n en la relación $\text{sen}(u+2pn) = \text{sen } u$.

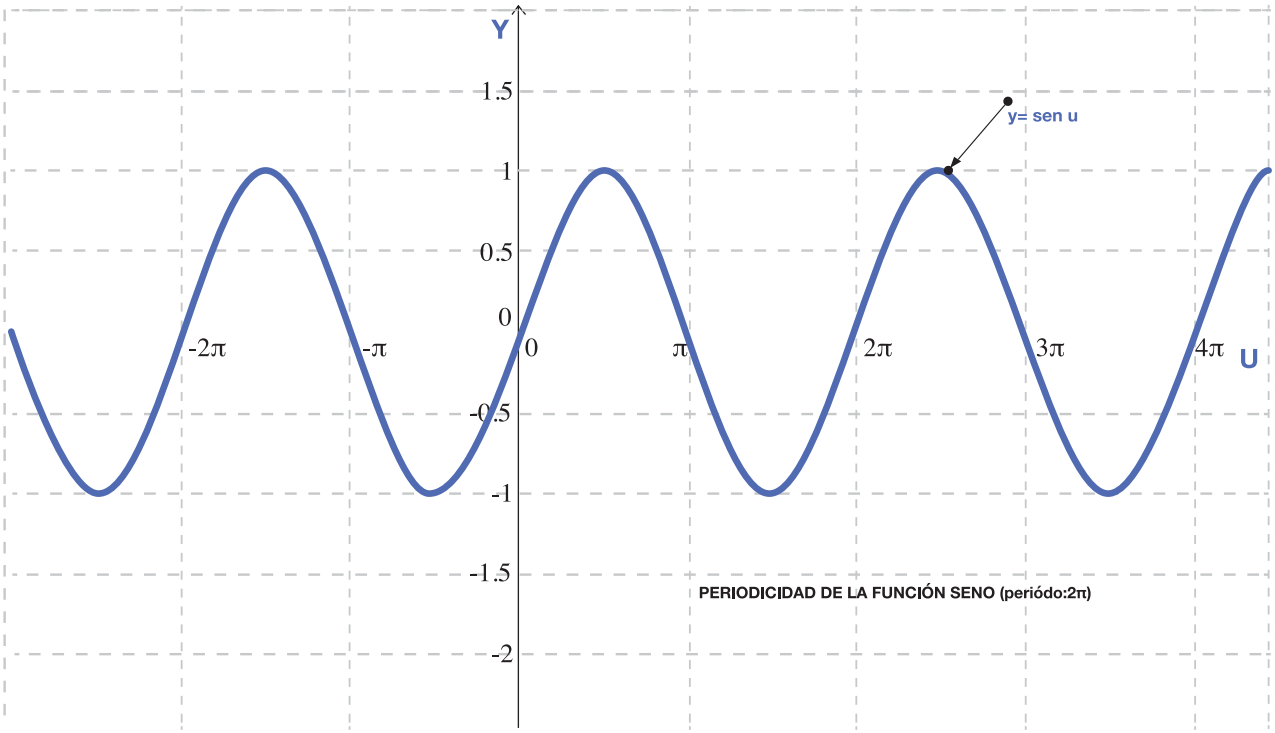


Figura 5. Periodicidad de la función seno

Forma general de la función seno

La función seno puede escribirse en su forma general como:

$$y = A\ sen\ (Bu - C) + \mathrm{D}; \qquad A \neq 0, B > 0$$

donde los parámetros A, B, C y D describen las siguientes características de la gráfica:

|A| = indica la amplitud de la onda.

B = afecta el periódo de la onda cuyo valor se obtiene como $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\mathrm{B}}$.

C = afecta al desfase o desplazamiento de fase de la onda, se calcula como $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{B}}$.

D = es la cantidad de unidades que la gráfica de la función seno es trasladada verticalmente, si D > 0, la gráfica se traslada D unidades hacia arriba, si D < 0, la gráfica se traslada D unidades hacia abajo.

5.2. Variación de la función coseno

Si hacemos el mismo análisis para la función coseno, es decir, hacemos variar a x desde 0 a 2π radianes, la función $y = \cos x$ alcanza los valores que pueden observarse en la siguiente tabla:

Variación de la función coseno									
$Y = \cos x$	1.0	0.707	0.0	- 0.707	-1.0	-0.707	0.0	0.707	1.0
x (radianes)	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
X (grados)	0	45º	90º	135º	180º	225º	270º	315º	360º

La gráfica de la función coseno se traza al unir los puntos $(x, \cos x)$ de la tabla anterior con una línea suave, este aspecto puede observarse en la figura 6. Al igual que ocurrió con la función seno, la variación de la función $y = \cos x$ para valores menores que 0, y mayores que 2π radianes, es la misma, por lo que se dice que la función coseno es ***periódica***, con periódo 2π. Esta propiedad periódica, que podemos observar en la figura 7 de la función coseno, satisface la relación $\cos(x+2pn) = \cos x$ para cualquier entero n.

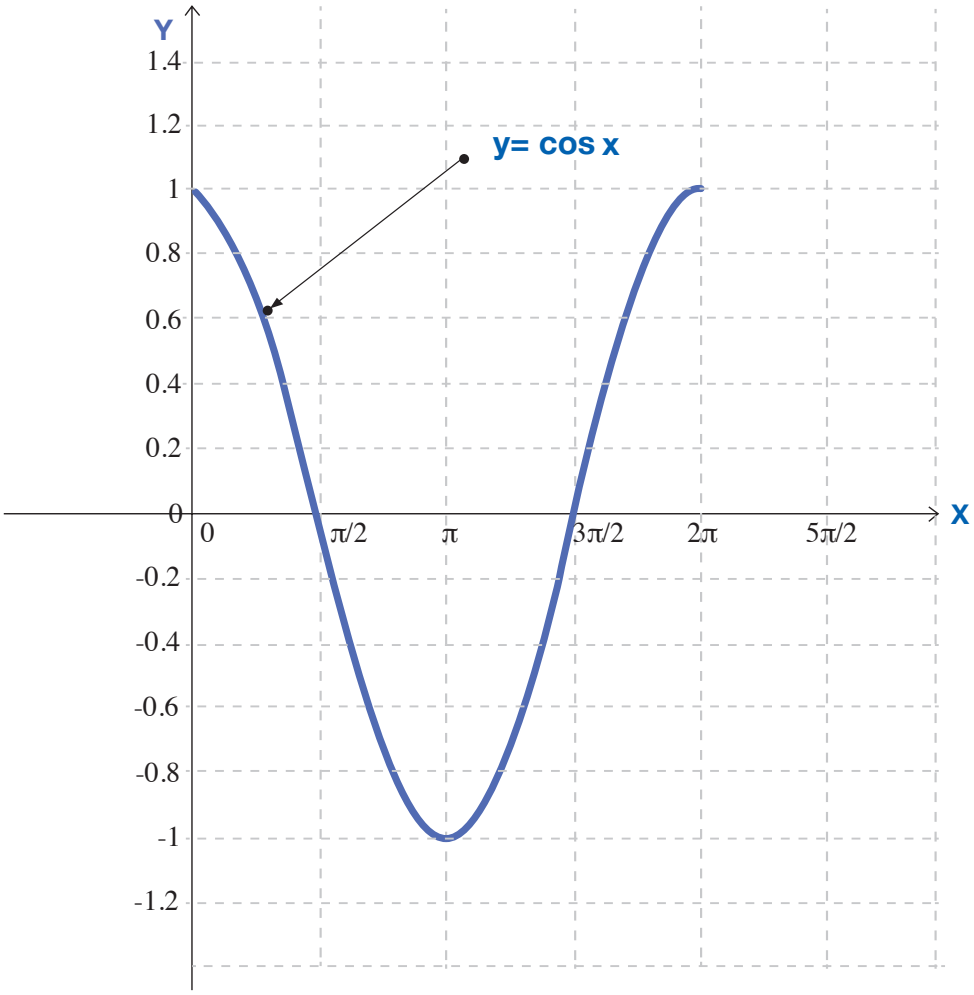


Figura 6. Variación de función coseno en el intervalo de 0 a 2π.

De acuerdo con la figura 6, la gráfica de la función coseno tiene las siguientes características:

Dominio:	$x \in \mathbb{R}$
Rango o recorrido:	$y \in [-1,1]$
Valores máximos:	en $x = -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, ..., 2n$, n = entero
Valores mínimos:	en $x = ..., -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, ..$
Intersecciones:	$x = ..., -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, ...(2n+1)\pi$, n = entero
Periódo:	2π

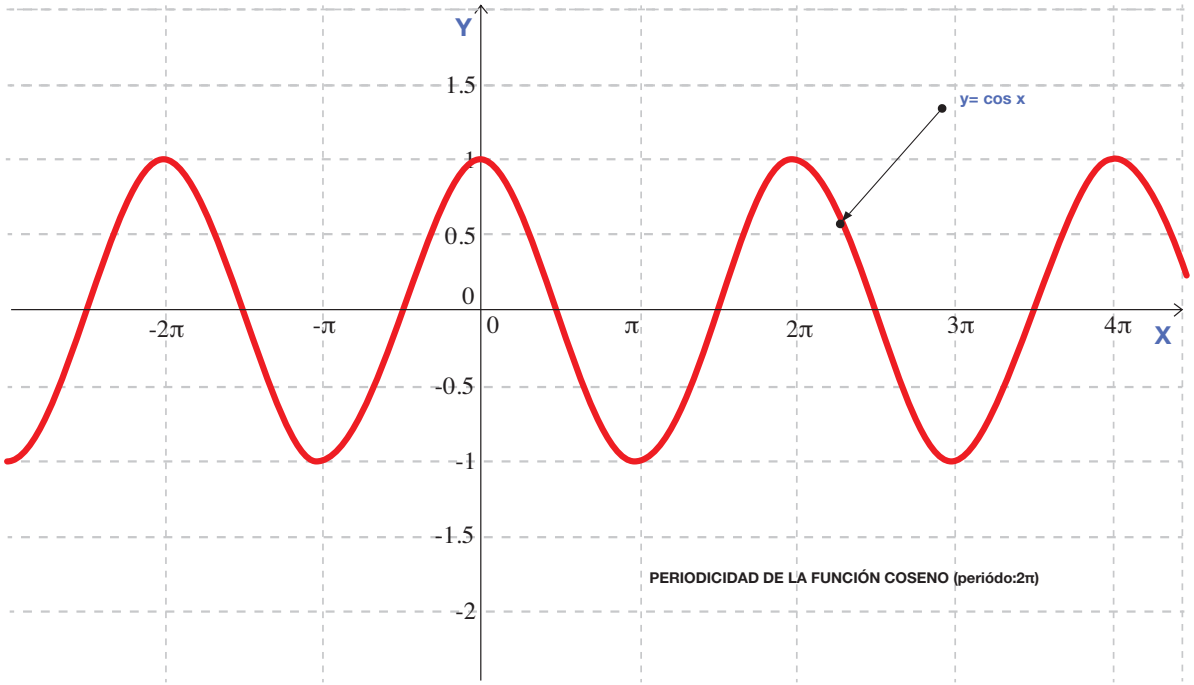


Figura 7. Periodicidad de la función coseno

Forma general de la función coseno

La función seno puede escribirse en su forma general como

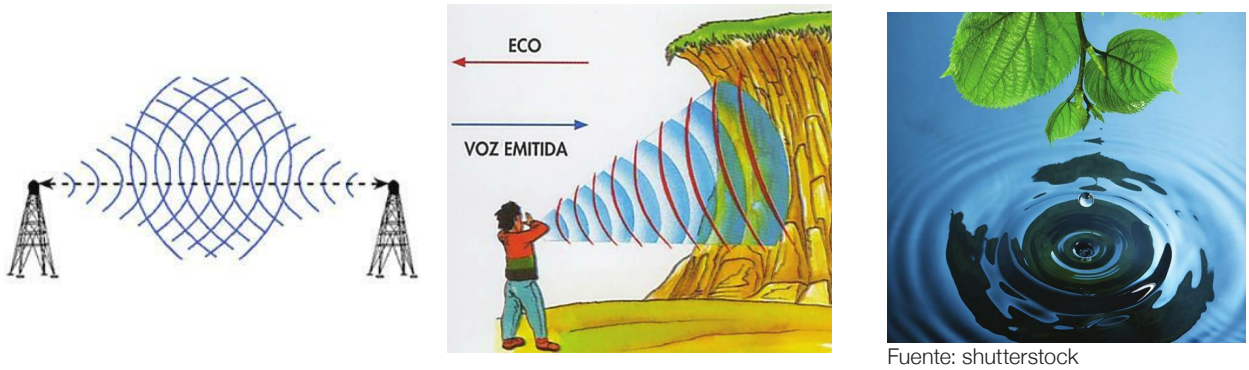
$$y = A\cos(Bx - C) + D;\ A \neq 0,\ B \quad B>0$$

Los parámetros A, B, C y D describen las mismas propiedades características definidas para la gráfica de la función seno en su forma general.

Propiedades ondulatorias de la funciones seno y coseno

Como se habrá observado en las gráficas de las funciones seno y coseno, cada una de ellas tiene forma de onda, concepto de mucha utilidad en la descripción de fenómenos físicos que tienen un comportamiento ondulatorio en el espacio (figura 8), tal como el sonido, las ondas

electromagnéticas, las vibraciones, la frecuencia cardiaca, el comportamiento ondulatorio del agua en un estante cuando un objeto golpea su superficie, etc.



Fuente: shutterstock

Figura 8. Fenómenos físicos de carácter ondulatorio

De acuerdo con lo expuesto, es necesario describir las características que presentan las ondas cosenoidales y senoidales, con el fin de hacer un análisis profundo de las mismas en los problemas de aplicación.

Amplitud. Es la mayor altura que alcanza la onda, medida por encima o por debajo del origen del sistema de referencia. Se mide en unidades de longitud.

Longitud de onda. Es la distancia que hay entre dos crestas o dos valles consecutivos, en términos generales describe cuán larga es la onda. Se mide en unidades de longitud.

Cresta. También conocido como monte, es el punto más alejado por encima de la posición de equilibrio (Eje x) de una onda.

Valle. Es el punto más alejado, por debajo de la posición de equilibrio (Eje x) de una onda, pero en el lado opuesto al lugar donde se ubican los montes o crestas.

Periódo (T). Es el tiempo que emplea la onda en completar una oscilación o ciclo, o bien, es el tiempo empleado por la misma para completar una longitud de onda. Se mide en unidades de tiempo, es decir, en segundos.

Intersecciones. Ocurre en aquellos valores de x donde la onda cruza al eje x, es decir, aquellos puntos donde la onda alcanza la posición de equilibrio.

Máximos y Mínimos. Son los valores de x, donde la onda alcanza sus valores máximos y mínimos, es decir, son las abscisas de las crestas y de los valles, respectivamente.

Frecuencia (f). Es inversamente proporcional al periódo: si éste disminuye, la frecuencia aumenta, y viceversa. Se refiere al número de ondas que pasan por un punto por cada segundo. Se mide en ciclos, vueltas u ondas por unidad de tiempo.

Toda onda presenta estas características y nos permite describir el alcance de las mismas en el medio donde se desplaza, la velocidad de propagación, la altura máxima que alcanza por encima de la posición de equilibrio, etc. Su medida y posición en la onda puede visualizarse en la figura 9.

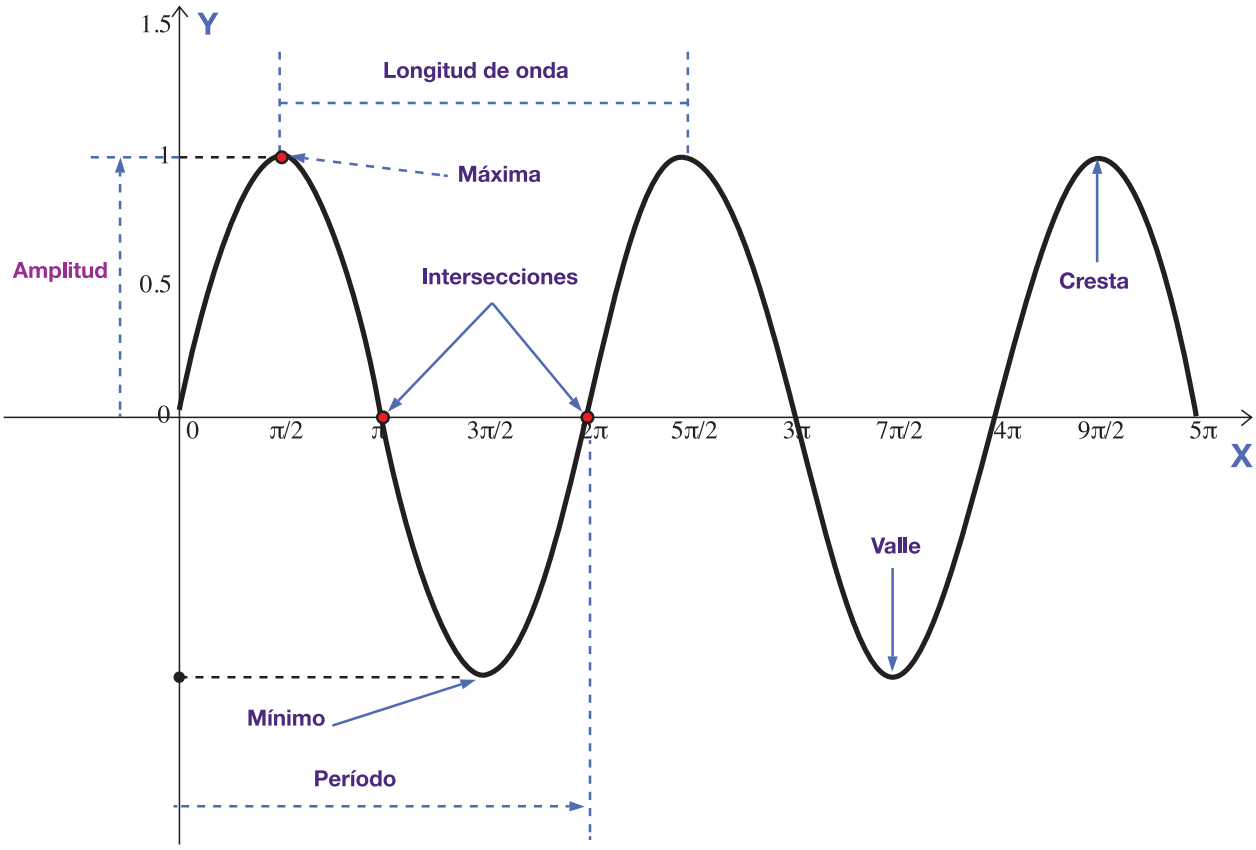


Figura 9. Elementos o características de una onda.

Usando las definiciones anteriores, las características de gráficas de las funciones seno y coseno en el intervalo de 0 a 2π pueden sintetizarse en la siguiente tabla.

Característica	Función	
	Seno	Coseno
Periódo (T), seg	$T = 2\pi$	$T = 2\pi$
Frecuencia (f=1/T), ciclos/seg	$f = \frac{1}{2\pi}$	$f = \frac{1}{2\pi}$
Amplitud	1.0	1.0
Longitud de onda	2π	2π
Máximos	$x = .., -\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \frac{9}{2}\pi, ..$	x=..,-4π, -2π, 0π, 2π, 6π,..
Mínimos	$x = .., -\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi, \frac{11}{2}\pi, ..$	x =..,-π, π, 3π, 5π, 7π,..
Intersecciones	x=.., -π, 0, π, 2π, 3π,..	$x = .., -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, ..$

Ejemplo:
Realiza un análisis general de la variación de la gráfica de la función $y = 3\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$. Traza su gráfica.

Solución:
Es una onda senoidal, observa que A=3, B=2, C= $\frac{\pi}{3}$ y D=1

Tracemos un periódo completo, para ello tomemos como se dijo antes, el intervalo de su dominio dado por:

$x \in \left[\frac{C}{B}, \frac{2\pi - C}{B}\right]$, sustituyendo C y B, tenemos

$$x \in \left[\frac{\frac{\pi}{3}}{2}, \frac{2\pi - \left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\right], u \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right]$$

y=sen x	1	3.6	3.6	1	-1.6
x	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$

Como puede observarse en la figura 10, en el mismo plano se encuentran las gráficas de $y = 3\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$ $y = 3\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3})$ con el fin de tener una idea de lo que ocurre con la variación de la función seno, si quitamos o agregamos parámetros a la forma general. Nótese también que ambas gráficas tienen la misma forma y tamaño, la diferencia radica en el número D=1 que traslada la gráfica de $y = 3\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3})$ una unidad hacia arriba para llamarse ahora $y = 3\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$.

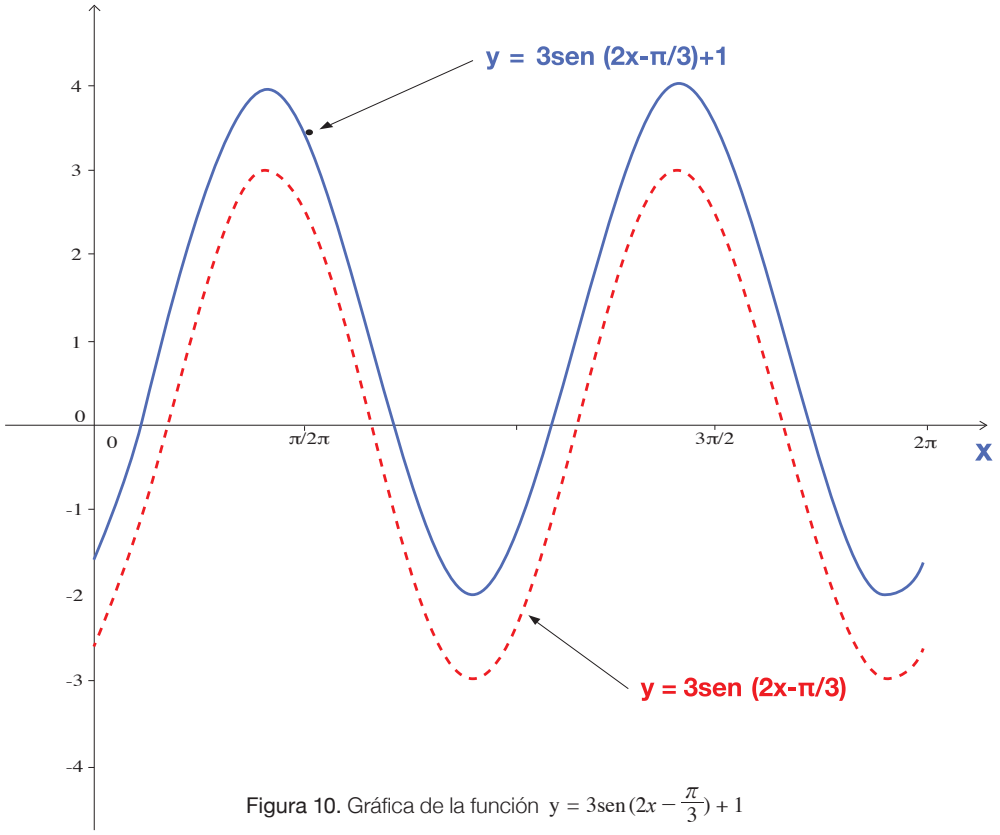


Figura 10. Gráfica de la función $y = 3\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$

El valor de B contribuye a que la gráfica se comprima o se alargue, es decir, influye directamente en el periódo de la gráfica. Con este valor, la función es periódica con valor de periódo $T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

El valor de C explica el desfasamiento o traslación horizontal de la gráfica de la función $y = 3\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$ (figura 10). Como C > 0, entonces la gráfica tiene un ángulo de desfasamiento hacia la derecha, cuyo valor en radianes es $x = \frac{C}{B}$, es decir $x = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{1}{6}\pi$.

En resumen, las propiedades características de la gráfica de la función $y = 3\text{sen}(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$, mostrada en la figura 10, son las siguientes:

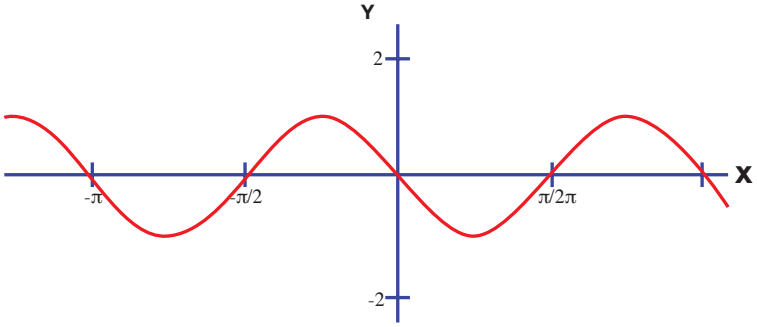
Dominio:	todos los reales $(u \in \circ)$
Rango o codominio:	$y \in [-\lvert A \rvert, \lvert A \rvert], y \in [-2,2]$
Periódo:	$T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ seg
Amplitud:	$\lvert A \rvert = 2$
Frecuencia:	$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$Hz
Longitud de onda:	distancia entre cresta y cresta L=2
Máximos:	x =-1, 1, 3, 5,...,(2n+1) n = entero
Mínimos:	x =-2, 0, 2, 4,...,2n n = entero
Defasamiento:	$x = \frac{1}{6}\pi$

M3 Basado en competencias

Trabajo en equipo
Módulo 3

Actividad en equipo:

Reúnanse en equipos de tres integrantes y llenen los datos faltantes en la tabla, los datos solicitados son las propiedades características de la gráfica proporcionada.



Dominio:	$y \in [-\alpha, +\alpha]$
Rango:	$y \in [-1,1]$

Amplitud	1
Intersecciones con el eje x	
Periódo	
Frecuencia	
Máximo	$x = .., -\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, ..$
Mínimo	
Longitud de onda	
Desfasamiento	$x = \frac{\pi}{2}$
Nombre de la función	Seno
Ecuación de la función	

Actividad:

Actividad
Módulo 3

En tu cuaderno realiza un análisis general de la variación de las siguientes funciones trigonométricas para dos ciclos. Traza su gráfica, auxíliate con una hoja de papel milimétrico o de cuadros.

1. $y = -\text{sen}\left(-\frac{1}{2}x\right)$
2. $y = 2\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$
3. $y = 3\text{sen}\,(2x - \pi)$
4. $y = 2.5\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Ejemplo:
Realiza un análisis general de la variación de la gráfica de la función. Traza su gráfica.

Solución:
Es una onda cosenoidal. Observaremos que $A=2$, $B=\pi$, $C=-\pi$ y $D=0$. Tracemos un periódo completo, para ello tomemos, como se dijo antes, el intervalo de su dominio dado por:

$$x \in \left[\frac{C}{B}, \frac{2\pi - C}{B}\right]$$

sustituyendo C y B, tenemos:

$$x \in \left[\frac{-\pi}{\pi}, \frac{2\pi - (-\pi)}{\pi}\right]$$

$$x \in [-1, 3]$$

y=sen x	–2	$1.2x10^{-16}$	–	$-3.6x10^{-16}$	2	$6.12x10^{-16}$	–2	$-8.5x10^{-16}$	2
x	–1	0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3

Como puede observarse en la figura 11, se trazan al mismo tiempo las gráficas de $y = 2\cos(\pi x + \pi)$ y $y = 2\cos(\pi x)$ para tener una idea general de lo que ocurre con la variación de la función coseno, si quitamos o agregamos parámetros a la forma general. La gráfica de la función $y = 2\cos(\pi x + \pi)$ es la misma de la función $y = 2\cos(\pi x)$, pero trasladada –1 radianes hacia la izquierda.

Los valores mínimo y máximo que alcanza la gráfica de $y = 2\cos(\pi x + \pi)$, respectivamente, son –2 y 2. El valor de A realiza este efecto sobre la gráfica.

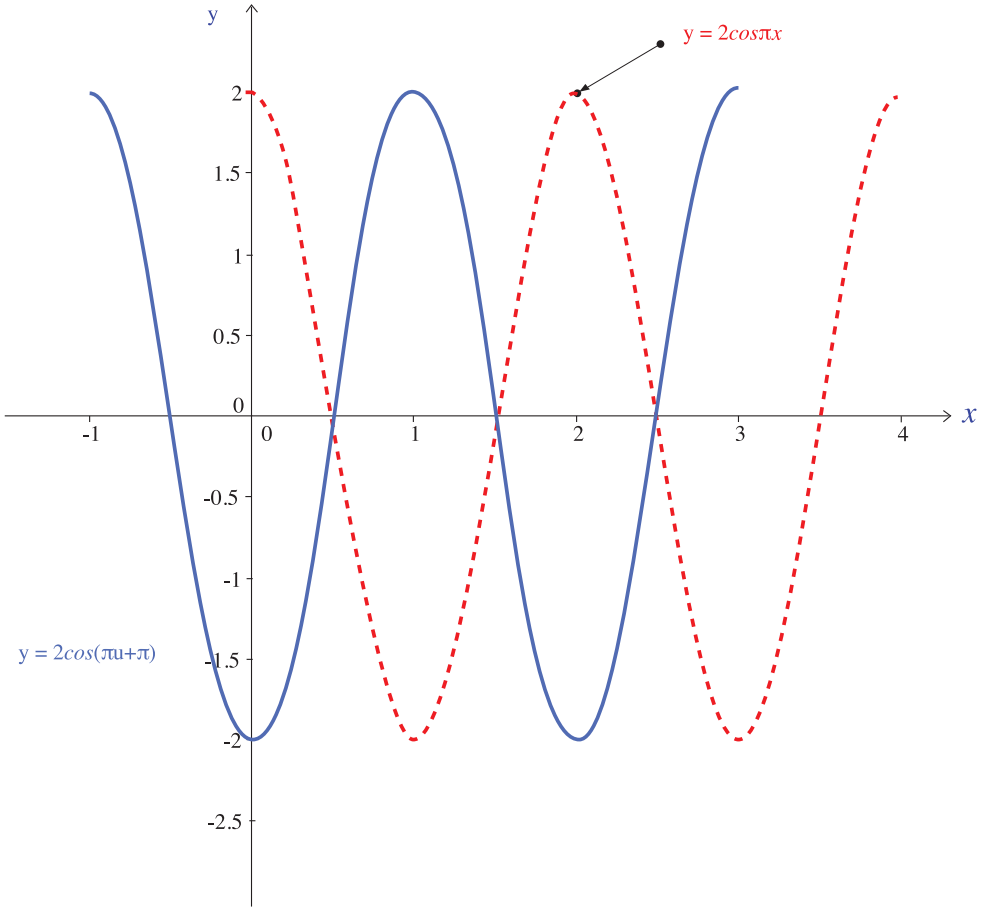


Figura 11. Gráfica de la función $y = 2\cos(\pi x + \pi)$

El valor de B contribuye a que la gráfica se comprima o se alargue, es decir, influye directamente en el periódo de la gráfica. Con este valor la función es periódica con valor de periódo $T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$

El valor de C nos dice el desfasamiento o traslación horizontal de la gráfica de la función $y = 2\cos(\pi u + \pi)$. Como C < 0, entonces la gráfica tiene un ángulo de desfasamiento hacia la izquierda, cuyo valor en radianes es $x = \frac{C}{B}$, es decir $x = \frac{-\pi}{\pi} = -1$.

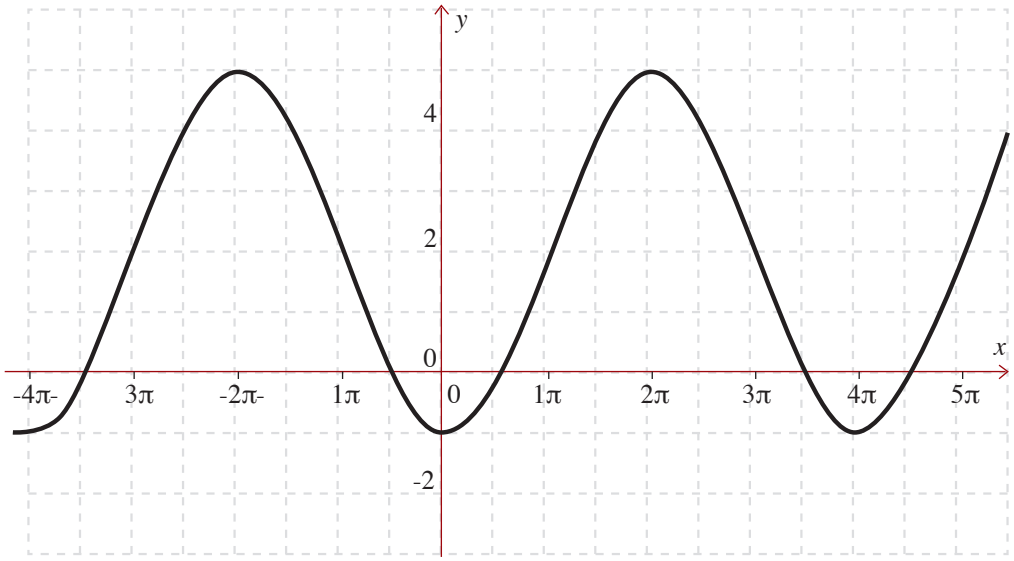
En resumen, las propiedades características de la gráfica de la función $y = 2\cos(\pi x + \pi)$ (figura 11) son las siguientes:

Dominio:	todos los reales $(x \in \mathbb{R})$	
Rango o codominio:	$y \in [-\lvert A \rvert, \lvert A \rvert], y \in [-2, 2]$	
Periódo:	$T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{\pi} = 2\text{seg.}$	
Amplitud:	$\lvert A \rvert = 2$	
Frecuencia:	$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}\text{Hz}$	
Longitud de onda:	distancia entre cresta y cresta $L = 2$	
Máximos:	En $x = -1, 1, 3, 5, \ldots, (2n+1)$	n = entero
Mínimos:	En $x = -2, 0, 2, 4, .., 2n$	n = entero
Intersecciones:	En $x = -0.5, 0.5, 1.5, .., (n + 0.5)$	n = entero
Defasamiento	$x = -1$	

Actividad en equipo:

Trabajo en equipo
Módulo 3

Reúnanse en equipos de tres integrantes y llenen los datos faltantes en la tabla, los datos solicitados son las propiedades características de la gráfica proporcionada.



Dominio	todos los reales
Rango	
Amplitud	5

Intersecciones con el eje X	
Periódo	T=4π
Frecuencia	
Máximo	
Mínimo	
Longitud de onda	L=4π
Desfasamiento	
Nombre de la función	
Ecuación de la función	$y = 3\cos\left(\frac{1}{2}x + \pi\right) + \frac{5}{2}$

M3 Basado en competencias

A Actividad Módulo 3

Actividad:

En tu cuaderno realiza un análisis general de la variación de las siguientes funciones trigonométricas para un ciclo. Traza su gráfica, auxíliate con una hoja de papel milimétrico o de cuadros.

1. $y = cos\,(4x)$
2. $y = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
3. $y = 1.5cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
4. $y = 2cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

5.3. Variación de la función tangente

La función tangente, definida por la relación $y = \tan x$, o bien $f(x) = \tan x$, es una función real de variable real, con dominio de todos los reales, excepto en aquellos valores donde el **cos x** es cero. Recuerda que

$$tan\,(x) = \frac{sen\,(x)}{cos\,(x)}$$

Si hacemos variar a u en el intervalo de 0 a 2π, la función tangente toma los siguientes valores:

Variación de la función tangente									
y = tan x	0.0	1.0	∞	-1.0	0.0	1.0	∞	-1.0	0.0
x (radianes)	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x (grados)	0	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°

Al trazar los pares obtenidos en el plano cartesiano y unirlos mediante una línea curva y suave, la gráfica de la función tangente puede observarse en la figura 12. La gráfica de la función tangente no existe en algunos valores de su dominio, en su lugar se trazan rectas paralelas al eje Y denominadas ***asíntotas*** de la función tangente.

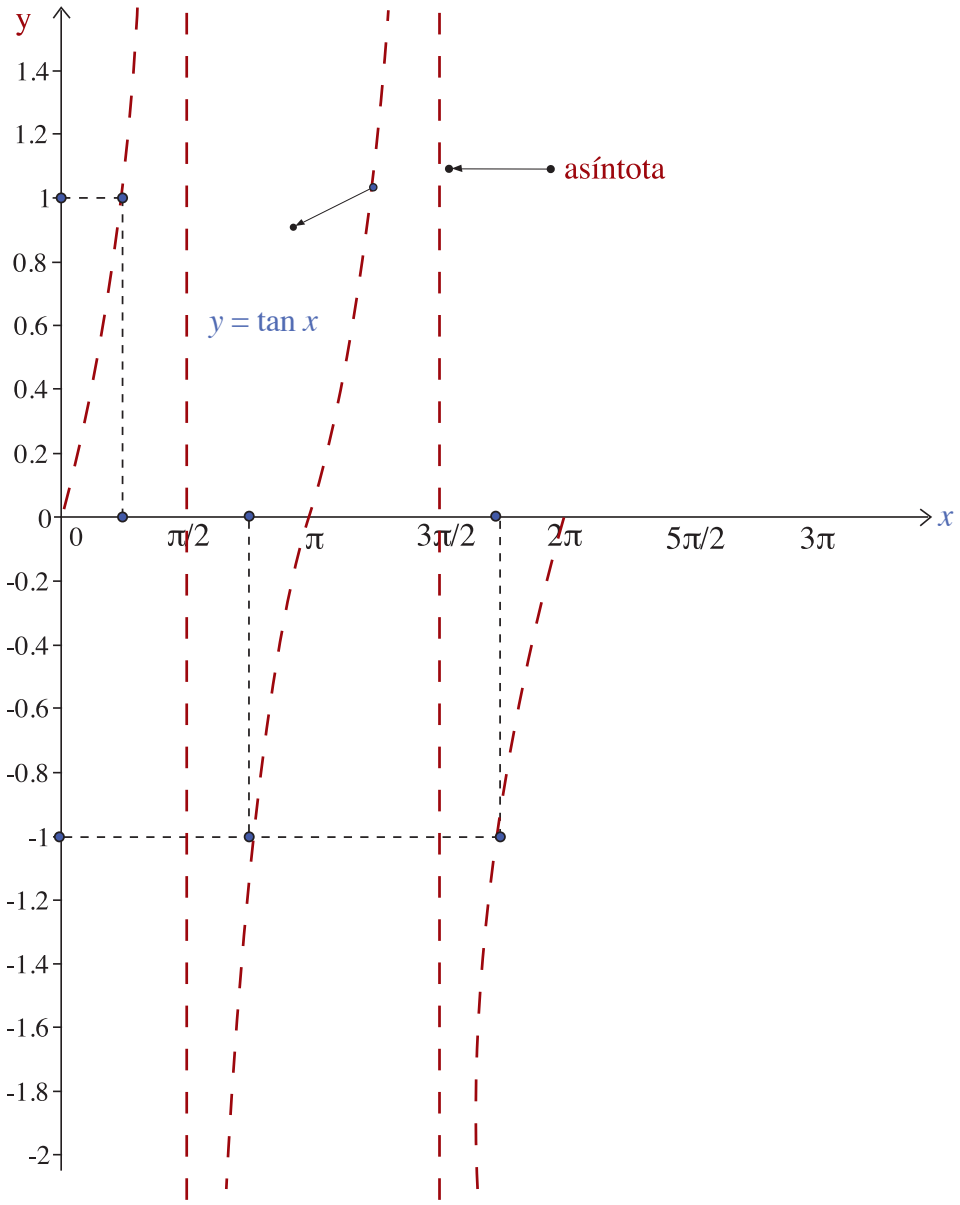


Figura 12. Variación de la función tangente en el intervalo de 0 a 2π

En las proximidades de dichas rectas, la gráfica se hace infinitamente grande y pequeña por izquierda y derecha, respectivamente. Por ejemplo, cuando u se acerca a $\frac{\pi}{2}$ por izquierda, la gráfica se aproxima a $+\infty$, mientras que si u tiende por la derecha, la gráfica de la función se aproxima a $-\infty$. También podemos observar que la gráfica se repite a cada π radianes, por tal motivo, la función tangente es una función **periódica** con periódo π.

En síntesis, de acuerdo con la figura 12, la gráfica de la función tangente tiene las siguientes propiedades características.

Dominio: $x \in \mathbb{R}, x \neq -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots, \frac{(2n+1)\pi}{2}$, *n = entero*

Rango o recorrido: $y \in [-\infty, +\infty]$

Intersecciones: $x = .., -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$ *n= entero*

Periódo: π

Asíntotas En $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, .., \frac{(2n+1)\pi}{2}$, *n = entero*

Actividad
Módulo 3

Actividad:

Elige un intervalo adecuado del dominio de las siguientes funciones y traza sus gráficas. Realiza un análisis detallado de todas las propiedades características de dichas gráficas.

1. $y = \sqrt{5 - x}$
2. $y = x^3 - x^2 + 2x - 5$
3. $y = \text{sen}\left[\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$
4. $y = 1 + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$
5. $y = -5\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 3$
6. $y = 3\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$
7. $y = \text{sen}(3x)$
8. $y = 2\csc(x)$
9. $y = 3\cos(x) - 2$
10. $y = 5\sec(x)$

M3
Basado en competencias

Resumen
Módulo 3

Resumen

En este capítulo se estudiaron la circunferencia, los elementos básicos que la determinan y el cálculo de su área y perímetro.

Se realizó el análisis de la medición de ángulos y arcos en una circunferencia, sector circular, así como la conversión de grados sexagesimales a radianes y viceversa.

Así mismo, se analizaron los parámetros y gráfica de las funciones trigonométricas seno y coseno y sus valores críticos, máximos y mínimos, e intersecciones con el eje x.

Se indican además las gráficas de las funciones trigonométricas $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \cot x$, para el conocimiento de su forma en el plano.

Para la comprensión de los temas indicados, es importante el acompañamiento que dé el profesor a los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Módulo 4

Identidades trigonométricas

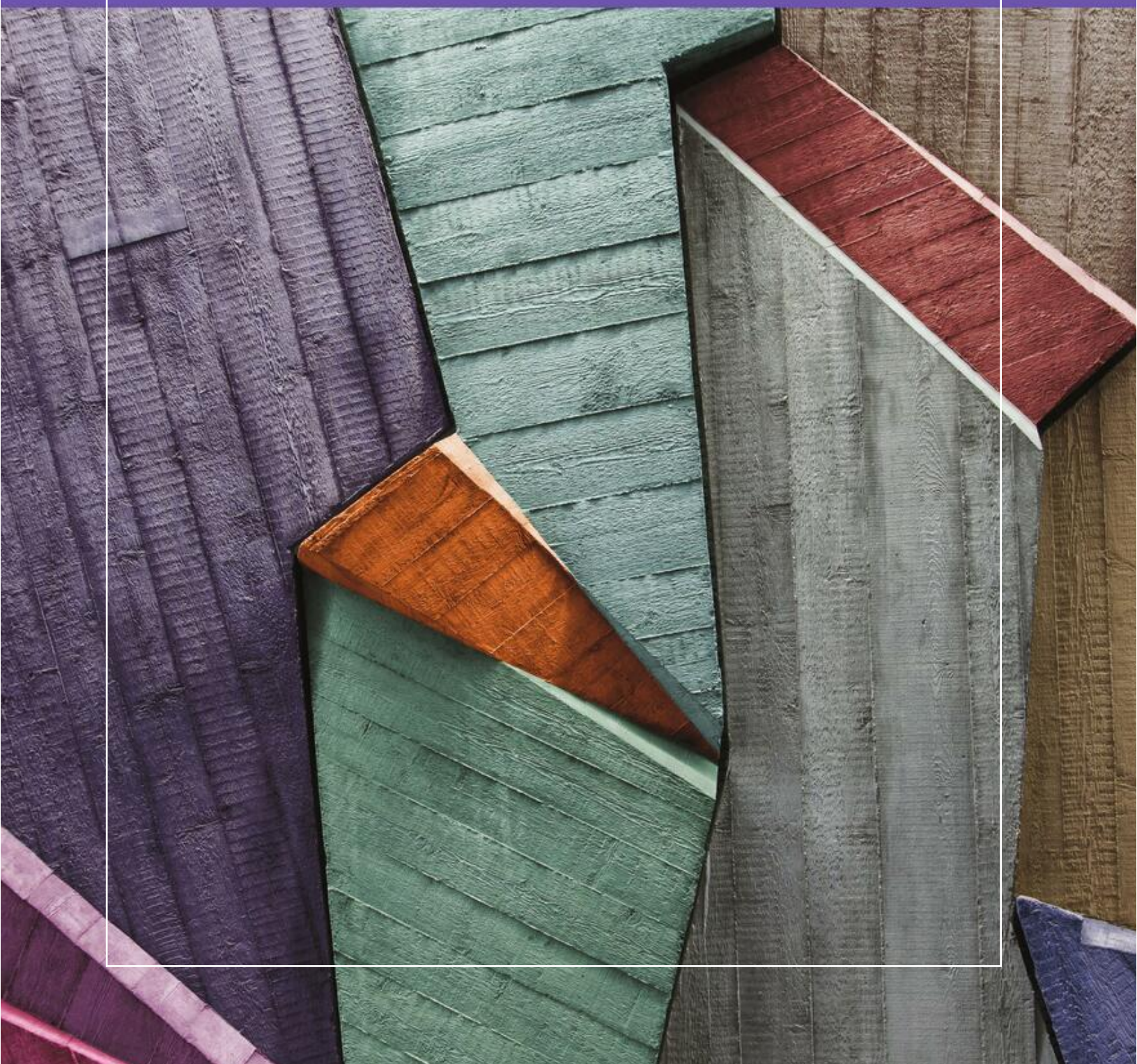
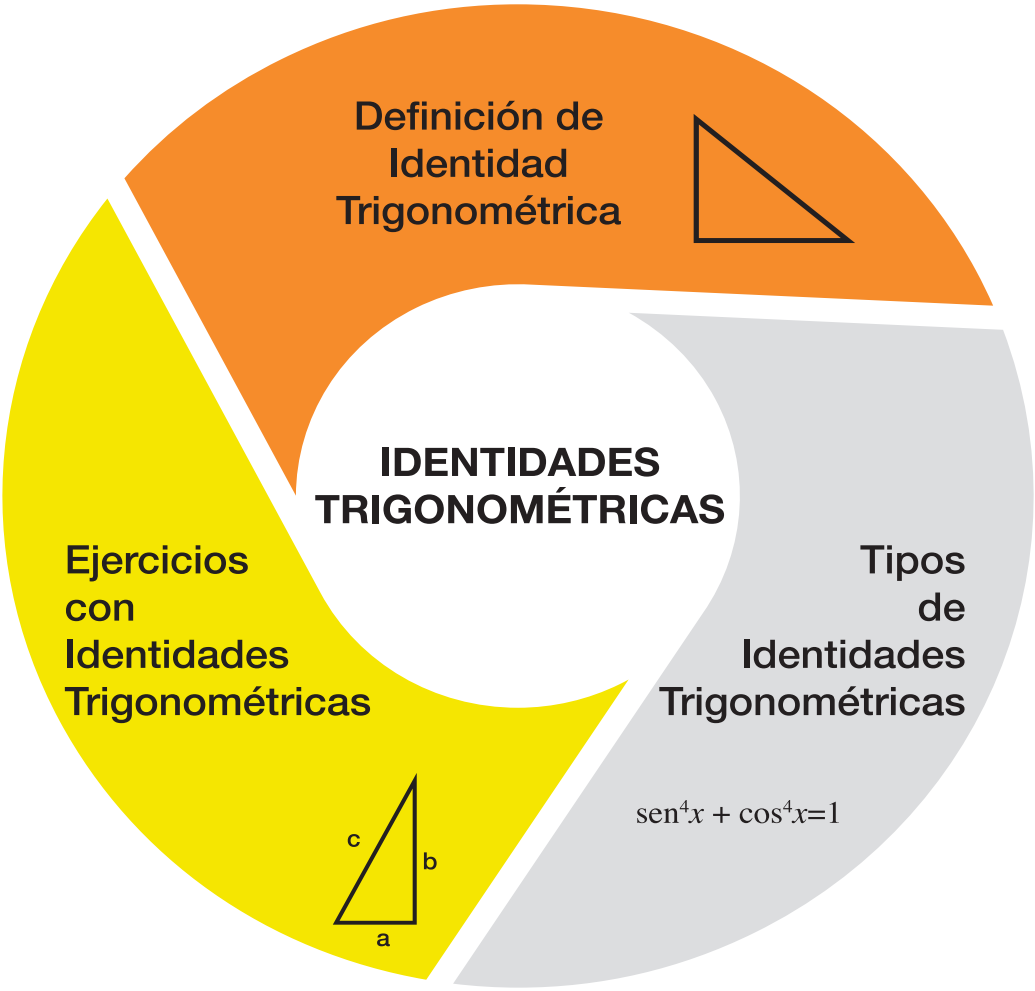


Diagrama de contenidos



M4
Basado en competencias

Propósito

Identificar las identidades trigonométricas, fortaleciendo el análisis deductivo y razonamiento lógico con el desarrollo en la solución de problemas donde se apliquen identidades fundamentales y de argumento compuesto.

Competencias

Competencias disciplinares

1. Construye e interpreta modelos matemáticos mediante la aplicación de procedimientos aritméticos, algebraicos, geométricos y variacionales, para la comprensión y análisis de situaciones reales, hipotéticas o formales.

2. Formula y resuelve problemas matemáticos, aplicando diferentes enfoques.

3. Explica e interpreta los resultados obtenidos mediante procedimientos matemáticos y los contrasta con modelos establecidos o situaciones reales.

Competencias genéricas y atributos

4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiados.
   4.1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.

5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.
   5.1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
   5.6 Utiliza las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.

Introducción

Una ecuación condicional es aquella que se cumple para ciertos valores de la variable, por ejemplo: $(x-3)(x+3)=0$ es una ecuación condicional, dado que la igualdad se cumple para $x=3$ o $x=-3$. Por otro lado, una identidad se cumple para todos los valores de la variable en los que la igualdad tiene sentido, como en el caso de la expresión $(x-3)(x+3)=x^2-9$. Una identidad se denota por el símbolo $\equiv$, que se lee "idéntico a". Existen ocho identidades fundamentales para las funciones trigonométricas, de gran importancia en el análisis trigonométrico; se clasifican en: 1) identidades de recíprocos, 2) de división, y 3) de cuadrados, las cuales se deducen en función de las definiciones de las funciones trigonométricas de los números reales, aun cuando también se cumplen para las funciones trigonométricas de ángulos.

1. Definición de identidades trigonométricas

Antes de abordar el tema, es importante considerar los siguientes conceptos:

a. Igualdad: existe entre dos expresiones que contiene una, dos o más variables.

b. Ecuación condicional: aquélla que es verdadera para ciertos valores de la variable involucrada.

c. Identidad: aquélla que es verdadera para cualquier valor de la variable, es decir, para todos aquellos valores que contenga el dominio de la ecuación se denota por el símbolo de identidad ($\equiv$).

Por lo anterior, se puede decir que las identidades trigonométricas se definen como las igualdades que existen entre las razones trigonométricas de una cierta variable o valor angular. Las identidades trigonométricas son verificables para todo valor de la variable, que no indetermina a la razón trigonométrica existente en la igualdad.

Las identidades trigonométricas se utilizan principalmente para representar una expresión matemática que involucran funciones trigonométricas de diferentes maneras, mediante su factorización y simplificación.

M4

Basado en competencias

Las razones trigonométricas parten del estudio de las funciones trigonométricas:

$$sen\ A = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

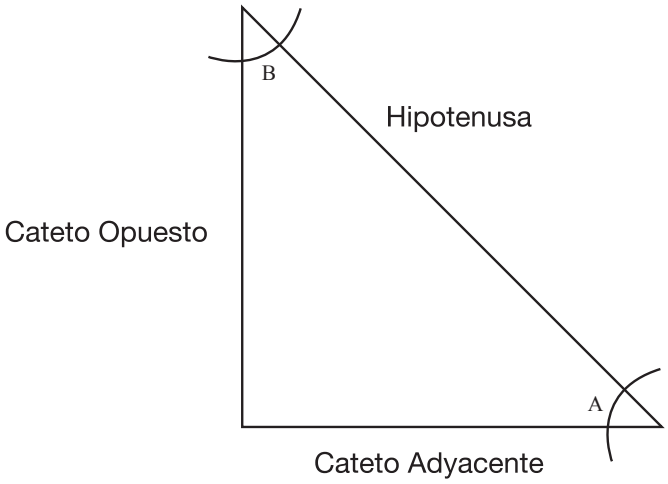
$$cosA = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

$$tanA = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$cotA = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

$$secA = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$$

$$cscA = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$$



?

¿Sabías que?
Módulo 4

El estudio de las identidades trigonométricas es fundamental para la comprensión del estudio del cálculo diferencial e integral.

2. Tipos de identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas se clasifican de la siguiente manera:

a) Recíprocas: se obtienen al efectuar el producto entre dos razones recíprocas, por ejemplo, sen y csc, cos y sec, tan y cot.

1. $\csc A \equiv \dfrac{1}{senA}$

2. $\sec A \equiv \dfrac{1}{cosA}$

3. $\cot A \equiv \dfrac{1}{tanA}$

b) Por división o cociente: representan la división entre dos razones trigonométricas.

1. $tanA\ cosA \equiv senA$

2. $tanA \equiv \dfrac{senA}{cosA}$

3. $cotA \equiv \dfrac{cosA}{senA}$

c) Pitagóricas: son el producto de la aplicación del Teorema de Pitágoras mediante las razones

1. $sen^2A + cos^2A \equiv 1$

2. $sen^2A \equiv 1 - cos^2A$

3. $cos^2A \equiv 1 - sen^2A$

4. $tan^2A + 1 \equiv sec^2A$

5. $sec^2A - tan^2A \equiv 1$

6. $tan^2A \equiv sec^2A - 1$

7. $cot^2A + 1 \equiv csc^2A$

8. $csc^2A - cot^2A \equiv 1$

9. $cot^2A \equiv csc^2 - 1$

a) Identidades de argumentos compuestos:

- Identidades de suma y resta de ángulos:

  1. $sen(x + y) \equiv sen(x)\ cos(y) + cos(x)\ sen\ (y)$

  2. $cos(x + y) \equiv cos(x)\ cos(y) - sen(x)\ sen\ (y)$

3. $tan(x+y) \equiv \dfrac{tan(x) + tan(y)\, 1 - tan(x)\tan(y)}{1 - tan(x)\, tan(y)}$

4. $sen(x - y) \equiv sen(x)\, cos(y) - cos(x)\, sen\,(y)$

5. $cos(x - y) \equiv cos(x)\, cos(y) + sen(x)\,\mathrm{sen}\,(y)$

6. $tan(x+y) \equiv \dfrac{tan(x) + tan(y)\, 1 + tan(x)\, tan(y)}{1 + tan(x)\, tan(y)}$

- Identidades de productos:

7. $sen^2\,(x) \equiv 1/2\,(1 - cos(2x))$

8. $sen\,(x)\, cos(\mathrm{x}) \equiv 1/2\, sen(2x)$

9. $sen\,(x)\, cos(y) \equiv 1/2\,(sen\,(x - y) + sen\,(x + y))$

10. $cos^2\,(x) \equiv 1/2\,(1 - cos(2x))$

11. $sen\,(x)\, sen(y) \equiv 1/2\,(cos\,(x - y) - cos\,(x + y))$

12. $cos(x)\, cos(y) \equiv 1/2\,(cos\,(x - y) + cos\,(x + y))$

- Identidades de ángulo doble:

13. $sen(2\,x) \equiv 2\, sen\,(x)\, cos\,(x)$

14. $cos(2\,x) \equiv 2\, cos^2\,(x) - 1$

15. $cos(2\,x) \equiv cos^2\,(x) - sen^2\,(x)$

16. $tan(2x) \equiv \dfrac{2tanx}{1 - tan^2 x}$

- Identidades trigonométricas auxiliares:

17. $sen^4\,x + cos^4\,x \equiv 1 - (2sen^2x)(cos^2x)$

18. $sen^6\,x + cos^6\,x \equiv 1 - (3sen^2x)(cos^2x)$

19. $(tan\,x + cot\,x) \equiv (sec\,x)(csc\,x)$

20. $sec^2\,x + csc^2\,x \equiv (sec^2x)(csc^2x)$

3. Ejercicios con identidades trigonométricas

Por medio de las identidades trigonométricas es posible realizar los siguientes tipos de ejercicios: demostración, simplificación, condicionales, eliminación angular y resolución de ecuaciones trigonométricas.

¿Sabías que? Módulo 4

Para resolver ejercicios con Identidades trigonométricas se deben considerar los siguientes consejos:

1. Elige el elemento más complejo de la identidad para verificar el factor más sencillo.
2. Realiza operaciones de suma, resta y multiplicación de fracciones trigonométricas.
3. Factoriza o realiza los productos notables. Es recomendable expresar la identidad como producto notable, sobre todo el denominador de una fracción.
4. Es conveniente escribir un miembro de la identidad en términos de seno y coseno.
5. Es importante mencionar que cuando se realizan ejercicios de identidades trigonométricas es indispensable determinar el elemento más sencillo de la identidad.

3.1. Simplificación de expresiones con identidades

Consisten en reducir cierta expresión mediante el uso de las identidades trigonométricas fundamentales o auxiliares con transformaciones algebraicas.

Ejemplos:
Simplifica las siguientes expresiones a una sola razón trigonométrica:

a) $\dfrac{sen\ 2x}{1+cos^2 x}$

Por identidad $cos2x = cos^2 x - sen^2 x$

$$= \frac{sen\ 2x}{1+cos^2 x - sen^2 x} \equiv \frac{sen\ 2x}{cos^2 x + 1 - sen^2 x}$$

Por identidad $cos^2 x \equiv 1 - sen^2 x$

$$= \frac{sen\ 2x}{cos^2 x - cos^2 x} \equiv \frac{sen\ 2x}{2cos^2 x}$$

Por identidad $sen\ 2x = 2\ sen\ x\ cos\ x$

$$= \frac{sen\ 2x}{2cos^2 x} \equiv \frac{2\ sen\ x\ cos\ x}{2cos^2 x} \equiv \frac{sen\ x}{cos\ x} \equiv tan\ x$$

b) $\left(\dfrac{sen\ 2x}{1-cos2x}\right)\left(\dfrac{sen\ 2x}{cos\ x}\right)$

Por identidad $Sen\ 2x \equiv 2\ sen\ x\ cos\ x$

$$\equiv \left(\frac{2sen\ x \cdot cos\ x}{1-cos2\ x}\right)\left(\frac{2sen\ x \cdot cos\ x}{cos\ x}\right)$$

Por identidad $sen^2 x \equiv 1 - cos^2 x$

$$\equiv \left(\frac{2sen\ x \cdot cos\ x}{sen^2 x}\right)\left(\frac{2sen\ x}{1}\right)$$

$$\equiv \left(\frac{2\cos x}{sen\ x}\right)\left(\frac{2sen\ x}{1}\right)$$

$$= \frac{(2)(2)\cos x \cdot sen\ x}{sen\ x\,(1)} \equiv \frac{4\cos x \cdot sen\ x}{sen\ x}$$

$$= \mathbf{4\cos x}$$

Actividad
Módulo 4

Actividad:

Simplifica las siguientes expresiones a una sola razón trigonométrica:

1. $\cos(x)\tan(x) =$

2. $\dfrac{\csc x - \csc^3 x}{sen\ x - sen^3 x} =$

3. $\dfrac{\cos^2 x}{1 - sen\ x} =$

4. $\dfrac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{sen\ x} =$

5. $\dfrac{1 + \tan^2 x}{\cos x} =$

M4
Basado en competencias

3.2. Verificación de Identidades

Consisten en realizar la demostración de cierta identidad, lo cual implica que el primer o segundo miembro sea reducido a una misma forma, usando diferentes transformaciones algebraicas o trigonométricas.

Ejemplos:
Demuestra las identidades trigonométricas indicadas:

a) $\boldsymbol{\tan x + \cot x = (\sec x)(\csc x)}$

Solución. Transformando el primer miembro.

$$\frac{sen\ x}{\cos x} + \frac{\cos x}{sen\ x} \equiv (\sec x)(\csc x)$$

$$\frac{sen^2 x + \cos^2 x}{(\cos x)(sen\ x)} \equiv (\sec x)(\csc x)$$

Por identidad $sen^2 x + \cos^2 x \equiv 1$

$$\frac{1}{(\cos x)(sen\ x)} \equiv (\sec x)(\csc x)$$

$$\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{1}{sen\ x}\right) \equiv (\sec x)(\csc x)$$

$$\therefore (\sec x)(\csc x) \equiv (\sec x)(\csc x)$$

b) $\boldsymbol{\cot^2 x \equiv \cos^2 x + (\csc x)(\csc x)}$

Solución. Transformando el segundo miembro.
$\cot^2 x \equiv \cos^2 x + (\csc^2 x)$

Por identidad

$$\cot^2 x \equiv \frac{\cos^2 x}{sen^2 x}$$

$$\therefore \cot^2 x \equiv \cot^2 x$$

c) $\sec x + \tan x \equiv \dfrac{1 + sen\ x}{\cos x}$

Solución. Transformando el primer miembro.

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{sen\ x}{\cos x} \equiv \frac{1 + sen\ x}{\cos x}$$

$$\therefore \frac{1 + sen\ x}{\cos x} \equiv \frac{1 + sen\ x}{\cos x}$$

Actividad:

Demuestra las siguientes identidades trigonométricas.

1. $(\cos x)(\sec x) \equiv 1$

2. $(1 + \cos x)(1\ \cos x) \equiv sen^2 x$

3. $\dfrac{sen\ x}{1 - \cos x} \equiv \csc x$

4. $\dfrac{\cos x}{sen\ x} + sen\ x \equiv \csc x$

5. $\dfrac{sen\ x}{\cos x + 1} + \dfrac{\cos x}{\sec x} = 1$

6. $\dfrac{sen^2 x - \tan^2 x}{\cos x} = sen\ x$

?

¿Sabías que?
Módulo 4

Para resolver una ecuación trigonométrica se utilizan los métodos de solución de ecuaciones aplicados en Álgebra, entre los cuales se pueden mencionar los métodos de despeje de una variable en ecuaciones de primer grado, o bien, el método de formula general para ecuaciones de segundo grado.

M4

Basado en competencias

3.3 Ecuaciones trigonométricas

Se refieren a la obtención del ángulo o número real a partir de ecuaciones que involucran funciones trigonométricas, mediante la aplicación de propiedades algebraicas y trigonométricas.

Ejemplos:
Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas.

a) $\mathbf{4\ cot\ \theta - 3} = \mathbf{2cot\ \theta} - 1$

Solución.

$4\ cot\ \theta - 2\ cot\ \theta = -1+3$

$2\ cot\ \theta = 2$

$cot\theta = \frac{2}{2}$

$cot\ \theta = 1$

$\frac{1}{tan\theta} = 1$

$tan\ \theta = 1$

$\theta = tan^{-1}\ 1$

$\therefore \theta = 45°$

b) $\mathbf{2\ cos^2\ \theta - 1} = \mathbf{-\ cos\ \theta}$

Solución:
Una ecuación cuadrática en su forma general es $ax^2 + bx + c = 0$, por lo que, agrupando de esta forma, se tiene:

$2cos^2\theta + cos\theta - 1 = 0$

Ésta puede ser resuelta utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En donde a = 2, b = 1 y c = –1, por lo que, sustituyendo estos valores en la fórmula general, se tiene:

$$cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-1)}}{2(2)}$$

$$cos\,\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm 3}{4} \begin{cases} \cos\theta = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \theta = \cos^{-1}\frac{1}{2} = 60^{\circ} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cos\theta = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \\ \cos\theta = -1 \\ \theta = \cos^{-1} -1 \\ \theta = 180^{\circ} \end{vmatrix}$$

c) $\boldsymbol{sen\,\theta - 1 = 2cos^2\theta}$

Solución:
En este caso, como no se tiene la misma variable en la ecuación trigonométrica, es necesario realizar la sustitución del $cos^2\,\theta = 1 - sen^2\,\theta$ dentro de la ecuación.

$sen\,\theta - 1 = 2\,(1 - sen^2\,\theta)$

$sen\,\theta - 1 = 2 - 2\,sen^2\,\theta$

Posteriormente, igualar la ecuación con 0 y resolver mediante la fórmula general.

$2sen^2\,\theta + sen\,\theta - 1 - 2 = 0$

$2sen^2\,\theta + sen\,\theta - 3 = 0$

Donde $a = 2, b = 1$ y $c = -3$, por lo que, sustituyendo estos valores en la fórmula general, se tiene:

$$sen\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$sen\,\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$sen\,\theta = \frac{-1 \pm 5}{4}$$

$$sen\,\theta = \frac{-1 + 5}{4}$$

Dos soluciones:

$sen\ \theta = 1$

$\theta = sen^{-1}\ 1$

$\boldsymbol{\theta = 90^{o}}$

$$sen\,\theta = \frac{-1 - 5}{4}$$

$$sen\,\theta = -\frac{3}{2}$$

$$\theta = sen^{-1} - \frac{3}{2}$$

$\theta = \nexists$

Conclusión: se considera $sen\ \theta = 1$ porque es la que satisface a la ecuación

M4

Basado en competencias

A

Actividad

Módulo 4

Actividad:

Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1. $cos\ \theta - 3 = -cos\ \theta - 1$

2. $2\ sen\ \theta - 1 = cos\ \theta - 1$

3. $sen^2\ \theta - 2sec\ \theta = 0$

4. $cos^2\ \theta + 2\ cos\ \theta - 3 = 0$

5. $sen^2\ \theta = 1$

6. $2\ sen^2\ \theta + cos\ \theta = 1$

Dentro de los ejercicios con identidades trigonométricas se incluyen también los ejercicios condicionales y de eliminación angular.

a) **Condicionales:** consisten en simplificar una condición dada que resulte ser complicada en una condición más simple, para con ello determinar la expresión pedida.

Ejemplo 1: si se tiene que $sen\ x + cos\ x = \frac{1}{2}$, determinar $(sen\ x)(cos\ x)$.

Solución:

$$(sen\ x + cos\ x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$sen^2 x + cos^2 x + (2sen\ x)(cos\ x) = \frac{1}{4}$$

Por identidad $sen^2 x + cos^2 x = 1$

$$(2sen\ x)(cos\ x) = \frac{1}{4} - 1$$

$$(2sen\ x)(cos\ x) = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore (sen\ x)(cos\ x) = -\frac{3}{8}$$

b) **De eliminación angular:** consisten en eliminar todas las expresiones trigonométricas y que al final queden solo expresiones independientes de la variable.

Ejemplo 3: eliminar la variable "x", a partir de:

$\boldsymbol{sen\ x = a}$

$\boldsymbol{cos\ x = b}$

Solución:

De:
$sen\ x = a$

Elevando al cuadrado se tiene:
$sen^2\ x = a^2$

De:
$cos\ x = b$

Elevando al cuadrado se tiene:
$cos^2\ x = b^2$

Sumando se tiene:
$sen^2\ x + cos^2 x = a^2 + b^2$

De lo anterior se obtiene:

$\mathbf{1} = \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2$

Actividad:

1. Simplifica las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $(sen\ x + cos\ x)^2 =$

b) $(1 + sen\ x)(1 - sen\ x) =$

c) $\dfrac{csc\ x}{1 + cot^2 x} =$

d) $sen^3 x + (sen^2 x)(cos\ x) =$

e) $\dfrac{cos\ x}{(tan\ x)(1 - sen\ x)} =$

2. Demuestra las siguientes identidades trigonométricas utilizando las ocho identidades fundamentales.

a) $cot\ B + tan\ B \equiv sec\ B\ csc\ B$

b) $\dfrac{cotA + cscAcosA}{cotA} \equiv 2$

c) $\dfrac{secA}{cot\ A + tan\ A} \equiv senA$

d) $sec^2\ Acot^2\ A - cos^2\ Acsc^2\ A \equiv 1$

e) $sec\ A cos\ A(1+\ cot^2\ A) \equiv \cot A$

f) $secB + tanB \equiv \dfrac{1 + senB}{cosB}$

g) $sec\ A cos\ A(1+\ tan^2\ A) \equiv \tan A$

h) $\dfrac{cosB + tanB}{secB} \equiv cos^2 B + senB$

i) $senB \cdot tan\ B + cos\ B \equiv \sec B$

j) $1 + cot^2\ A \equiv \sec^2 A \cot^2 A$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $(sen\ x)^2 - sen\ x = 0$

b) $2(cos\ x)^2 - cos\ x = 0$

c) $3\ tan\ x + 3 = 0$

d) $4(sen\ x)^2 - 1 = 0$

e) $2(cos\ x)^2 - cos\ x - 1 = 0$

f) $2\ cos\ x = 3\ tan\ x$

g) $2\ tan\ x - 3\ cot\ x - 1 = 0$

h) $cos^2\ x - 3cos\ x = 0$

Resumen
Módulo 4

Resumen

Este módulo se enfocó en reducir y verificar expresiones trigonométricas aplicando las diferentes identidades fundamentales. Asimismo, se mencionó que existen otras identidades denominadas de argumento compuesto y que, en conjunto con las identidades fundamentales, se utilizan en la solución de ecuaciones trigonométricas, encauzando al alumno al desarrollo de su pensamiento lógico matemático, mediante la aplicación de estrategias que le guíen a la solución acertada de los ejercicios.

Por lo anterior, es importante el acompañamiento que dé el profesor a los estudiantes durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Bibliografía

- Arriola, M. *et al.* (2007), *Desarrollo de competencias en el proceso de instrucción*, México: Trillas.
- Baley, John D. y Gary Sarell (2004), *Trigonometría*, México: McGrLlal, 3ª edición.
- Biggs, John (2005), *Calidad del aprendizaje universitario*, Madrid: Narcea.
- Cuellar Carvajal, Juan Antonio (2005), *Matemáticas II para Bachillerato*, México: McGrawHill.
- Hernández, D. et al. (2010), *Álgebra*, México: UAEM.
- Hornsby (2006), *Trigonometría*, México: Pearson.
- Orozco, E. (1992), *Haciendo matemática, Álgebra I*, México.
- Pérez, M. (2006), *Matemáticas 2 para bachillerato. Geometría y trigonometría. Guía de aprendizaje*, México: Alfaomega.
- Pimienta Prieto, Julio, Vicente Acosta Argüello *et al.* (2006), *Matemáticas III*, México: Pearson Prentice Hall.
- Ramírez, M. *et al.* (2006), *Sugerencias didácticas para el desarrollo de competencias en secundaria*, México: Trillas.
- Swokowski, E. *et al.* (2001), *Trigonometría*, México: Thompson Learning, 9ª ed.

Directorio

Doctor en Ciencias e Ingeniería Ambientales
Carlos Eduardo Barrera Díaz
Rector

Doctora en Ciencias de la Educación
Yolanda Eugenia Ballesteros Sentíes
Secretaria de Docencia

Doctora en Ciencias Sociales
Martha Patricia Zarza Delgado
Secretaria de Investigación y Estudios Avanzados

Doctor en Ciencias de la Educación
Marco Aurelio Cienfuegos Terrón
Secretario de Rectoría

Doctora en Humanidades
María de las Mercedes Portilla Luja
Secretaria de Difusión Cultural

Doctor en Ciencias del Agua
Francisco Zepeda Mondragón
Secretario de Extensión y Vinculación

Doctor en Educación
Octavio Crisóforo Bernal Ramos
Secretario de Finanzas

Doctora en Ciencias Económico Administrativas
Eréndira Fierro Moreno
Secretaria de Administración

Doctor en Ciencias Computacionales
José Raymundo Marcial Romero
Secretario de Planeación y Desarrollo Institucional

Doctora en Derecho
Luz María Consuelo Jaimes Legorreta
Abogada General

Doctor en Ciencias Sociales
Luis Raúl Ortíz Ramírez
Secretario Técnico de la Rectoría

Licenciada en Comunicación
Ginarely Valencia Alcántara
Directora General de Comunicación Universitaria

Doctora en Ciencias de la Educación
Sandra Chávez Marín
Directora General de Centros Universitarios y Unidades Académicas Profesionales

Doctora en Investigación Educativa
Eva Lilia García Escobar
Directora de Estudios de Nivel Medio Superior

Planteles Dependientes
de la Escuela Preparatoria

Doctor en Tecnología e Innovación de la Educación
Arturo Mejía Zamora
Plantel "Lic. Adolfo López Mateos"

Doctora en Educación
Asela Monserrat Márquez Ramírez
Plantel "Nezahualcóyotl"

Maestro en Administración Pública y Gobierno
Raúl Juárez Toledo
Plantel "Cuauhtémoc"

Doctora en Ciencias de la Educación
María del Rocío García de León Pastrana
Plantel "Ignacio Ramírez Calzada"

Maestro en Administración de Empresas
Miguel Francisco Gutiérrez Sánchez
Plantel "Dr. Ángel Ma. Garibay Kintana"

Maestra en Ciencias de la Educación
Sofía Sandoval Trejo
Plantel "Texcoco"

Doctora en Educación Permanente
María de Lourdes Reyes Pérez
Plantel "Sor Juana Inés de la Cruz"

Maestra en Ciencias Ambientales
Janette Jaimes García
Plantel "Dr. Pablo González Casanova"

Doctora en Tecnología e Innovación de la Educación
Mónica Garduño Suárez
Plantel "Isidro Fabela Alfaro"

Licenciada en Comunicación
Ana Vianey Suárez Castro
Plantel "Mtro. José Ignacio Pichardo Pagaza"